

1) (3p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{2x})^{1/(e^x - 1)}$$

2) (2p) Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

3) (2p) Calcula el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en $x=0$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x \leq 0 \\ e^{ax+b} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = 2 \cdot \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

5) (1,5p) Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y^3 - 3y^2 - yx + 3 = 0$ en el punto de ordenada 3.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{2x})^{1/(e^x - 1)}$$

(3 Puntos)

* * *

Solución:**a)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \stackrel{1}{=} \frac{\ln \frac{1}{+\infty}}{\ln \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)} = \frac{\ln 0^+}{\ln 1^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{2x})^{1/(e^x - 1)} &\stackrel{2}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} \cdot (2 - e^{2x} - 1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{e^x - 1}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^{2x} - 1)}{e^x - 1}} \stackrel{3}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-e^x - 1)} = e^{-2} \end{aligned}$$

¹ Para calcular el límite del numerador y el del denominador aplicamos la regla del límite de la composición.

² Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞ .

³ También puede hacerse teniendo en cuenta que $e^f - 1 \sim f$ si f es un infinitésimo. O por L'Hôpital.

Ejercicio 2: Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a \in \text{Dom}(f)$:¹

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/a}} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$ y, por tanto, carece de asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/0^-}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/0^+}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

4º) La recta $y=1/2$ es asíntota horizontal de la función en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/\pm\infty}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = 1/2$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{1}{1+e^{1/x}} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{1/x}}{2(1+e^{1/x})} = \frac{1-e^{1/x}}{2(1+e^{1/x})}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $-\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,² la función se encuentra situada por encima de la asíntota; y como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el numerador es negativo y el denominador positivo,³ la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

² Si $x < 0$, la función exponencial $e^{1/x}$ es positiva y menor que 1.

³ Si $x > 0$, la función exponencial $e^{1/x}$ es mayor que 1.

Ejercicio 3: Calcula el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en $x=0$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x \leq 0 \\ e^{ax+b} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Si $x \neq 0$, la derivada de f es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ a \cdot e^{ax+b} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si f es continua¹ en $x=0$, entonces $a=e^b$:

- $f(0)=a$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x+a) = a$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{ax+b} = e^b$

Si f es derivable en $x=0$, entonces $a \cdot e^b = 1$:

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 1 = 1$
- $f'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (a \cdot e^{ax+b}) = a \cdot e^b$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a=e^b \\ a \cdot e^b=1 \end{cases} \Rightarrow e^b \cdot e^b=1 \Rightarrow e^{2b}=1 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=e^0=1$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x+a-a}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 1 = 1$
- $f'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{ax+b} - a}{x} = \frac{e^b - a}{0^+} \xrightarrow{2} e^b - a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{ax+b} - a}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cdot e^{ax+b}}{1} = a \cdot e^b$$

Por tanto, para que la función sea derivable, $a \cdot e^b = 1$. Llegamos, pues, al mismo sistema que antes.

¹ Si f es derivable en $x=0$, debe ser continua en dicho punto.

² Si $e^b - a \neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en $x=0$.

³ Como $e^b - a = 0$, sale la indeterminación $0/0$; por tanto, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sustituyendo a por e^b , sacando luego e^b factor común de $e^{ax}-1$ y teniendo en cuenta que $e^f-1 \sim f$ si f es un infinitésimo.

Ejercicio 4: Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)' = 2 \cdot \frac{1-x}{1-x+1+x} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \\ &= 2 \cdot \frac{1-x}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{2}{1-x} \stackrel{1}{=} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)^2}{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

¹ Como $1-x > 0$, ya que $\operatorname{Dom}(f) = [-1, 1)$, resulta que $1-x = |1-x| = \sqrt{(1-x)^2}$.

Ejercicio 5: Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y^3 - 3y^2 - yx + 3 = 0$ en el punto de ordenada 3.

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la abscisa del punto de tangencia:

$$y^3 - 3y^2 - yx + 3 = 0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 27 - 27 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:²

$$3y^2y' - 6yy' - y'x - y = 0$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$3y^2y' - 6yy' - y'x - y = 0 \stackrel{3}{\Rightarrow} 27y' - 18y' - y' - 3 = 0 \Rightarrow 8y' = 3 \Rightarrow y' = 3/8$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	3	3/8

4º) Por tanto, la ecuación general de la recta tangente es:

$$y - 3 = \frac{3}{8} \cdot (x - 1) \Rightarrow 8y - 24 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 8y + 21 = 0$$

¹ Ya que $y=3$.

² Por el método de derivación implícita.

³ Ya que $x=1$ e $y=3$.