1) (2p) Calcula:

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x}$$

2) (3p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{3^x+2}{3^x-1}$$

3) (2p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$$

4) (1,5p) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=x^{x+1}$ en el punto de abscisa 1.

5) (1,5p) Estudia la monotonía y los extremos de la función:

$$f(x)=e^x(x^3-x-2)$$

Ejercicio 1: *Calcula:*

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} \overset{1}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}\cdot(x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(-1)} = e^{-1} = 1/e$$

b)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(1+\operatorname{sen} x)\right] = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \Rightarrow 0 \le 1+\operatorname{sen} x \le 2$

[1] Ya que sale la expresión indeterminada 1^{∞}.

Ejercicio 2: Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{3^x+2}{3^x-1}$$

(3 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$3^x-1\neq 0 \Rightarrow 3^x\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$$

2º) La recta x=0 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{3^x+2}{3^x-1}=\frac{1+2}{0^-}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{3^x+2}{3^x-1}=\frac{1+2}{0^+}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

3º) Las rectas y=-2 e y=1 son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y en $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+2}{3^x-1}=\frac{3^{-\infty}+2}{3^{-\infty}-1}=\frac{0+2}{0-1}=-2$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{3^x+2}{3^x-1}+2=\frac{3^x+2+2\cdot 3^x-2}{3^x-1}=\frac{3^x(1+2)}{3^x-1}=\frac{3^{x+1}}{3^x-1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo[1], la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+2}{3^x-1}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot\left(1+\frac{2}{3^x}\right)}{3^x\cdot\left(1-\frac{1}{3^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{3^x}}{1-\frac{1}{3^x}}=\frac{1+\frac{2}{+\infty}}{1-\frac{1}{+\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{3^x+2}{3^x-1}-1=\frac{3^x+2-3^x+1}{3^x-1}=\frac{3}{3^x-1}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que numerador y denominador son positivos[3], la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

---

[1] El signo del denominador para valores menores que 0 es negativo, ya que $3^x<1$.

[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, podemos aplicar L'Hôpital. Es la forma más sencilla de calcular este límite. Aunque también puede hacerse como sigue.

[3] El signo del denominador para valores mayores que 0 es positivo, ya que $3^x>1$.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=arc\,tg\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{(1+tg\,x)^2}{(1-tg\,x)^2}}\cdot\frac{(1+tg^2x)(1-tg\,x)+(1+tg^2x)(1+tg\,x)}{(1-tg\,x)^2}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{(1+tg\,x)^2}{(1-tg\,x)^2}}\cdot\frac{(1+tg^2x)(1-tg\,x+1+tg\,x)}{(1-tg\,x)^2}=$$

$$=\frac{2(1+tg^2x)}{(1-tg\,x)^2+(1+tg\,x)^2}=\frac{2(1+tg^2x)}{1-2\cdot tg\,x+tg^2x+1+2\cdot tg\,x+tg^2x}=$$

$$=\frac{2(1+tg^2x)}{2+2tg^2x}=\frac{2(1+tg^2x)}{2(1+tg^2x)}=1$$

Ejercicio 4: *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=x^{x+1}$ en el punto de abscisa 1.* *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1)=1^2=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[1]

$$y=x^{x+1} \overset{2}{\Rightarrow} \ln y=(x+1)\cdot\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{x\cdot\ln x+x+1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1+x+x\cdot\ln x}{x}\cdot x^{x+1}=(1+x+x\cdot\ln x)\cdot x^x$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1)=(1+1+\ln 1)\cdot 1^1=2$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	2

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-1=2\cdot(x-1) \Rightarrow y-1=2x-2 \Rightarrow y=2x-1$$

[1] Por el método de derivación logarítmica. También puede derivarse escribiéndola como función exponencial de base e.
[2] Por las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: *Estudia la monotonía y los extremos de la función:*

$$f(x)=e^x(x^3-x-2)$$ *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Para estudiar la monotonía utilizamos el criterio de la derivada primera:

$$f'(x)=e^x(x^3-x-2)+e^x(3x^2-1)=e^x(x^3-x-2+3x^2-1)=$$

$$=(x^3+3x^2-x-3)e^x \overset{1}{=} (x-1)(x+1)(x+3)e^x$$

Intervalos	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
f' es	-	+	-	+
f es	decreciente	creciente	decreciente	creciente

Como f es continua en x=-3, x=-1 y x=1 (por ser derivable en dichos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera,[2] la función tiene un mínimo en x=-3 que vale $y=-26/e^3$, un máximo en x=-1 que vale y=-2/e y un mínimo en x=1 que vale y=-2e.

[1] Descomponemos el polinomio en factores por Ruffini.
[2] El estudio de los extremos también puede hacerse con el criterio de la derivada segunda.