

1) (3p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x)}{e^x} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{x - 3}$$

2) (2p) Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) (2p) Averigua si la siguiente función es derivable en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1}$$

5) (1,5p) Halla la ecuación general de la recta tangente a la cónica $y^2 = x$ trazada desde el punto $(0, -1)$.

¹ Al no disponer de este examen, se ha sustituido por otro. La fecha también es ficticia.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x)}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{x - 3}$$

(3 Puntos)

* * *

Solución:**a)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^x} \cdot \sin(2x) \right] = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{x - 3} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{-x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{-x - 3} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{-x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(\frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right)}{x \cdot \left(-1 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{-1 - \frac{3}{x}} = \frac{0 - \sqrt{1+0}}{-1-0} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

¹ Ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ cuando $x < 0$.

² Ya que, como estamos calculando el límite en $+\infty$, x es positivo. Por tanto: $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

Ejercicio 2: Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=R.

2º) La función f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ya que si $a \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^a + 3^{1/a^2}} = f(a)$$

3º) La función f tiene una discontinuidad evitable en $x=0$ y, por tanto, carece de asíntotas verticales:

- $f(0)=1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^0 + 3^{1/0^+}} = \frac{1}{1 + 3^{+\infty}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

4º) Las rectas $y=1$ e $y=0$ son asíntota horizontales de la función f en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^{-\infty} + 3^{1/+\infty}} = \frac{1}{0 + 3^0} = \frac{1}{1} = 1$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} - 1 = \frac{1 - 3^x - 3^{1/x^2}}{3^x + 3^{1/x^2}} = \frac{(1 - 3^{1/x^2}) - 3^x}{3^x + 3^{1/x^2}}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es negativo¹ y el denominador positivo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^{+\infty} + 3^{1/+\infty}} = \frac{1}{+\infty + 3^0} = \frac{1}{+\infty + 1} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}} - 0 = \frac{1}{3^x + 3^{1/x^2}}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que numerador y denominador son positivos², la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

¹ La función exponencial de base 3 es siempre positiva y mayor o menor que 1 según sea el exponente positivo o negativo. Observa que, entonces, el paréntesis es negativo.

² La función exponencial de base 3 es positiva.

Ejercicio 3: Averigua si la siguiente función es derivable en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2 \text{ Puntos})$$

* * *

Solución:

Como la función no es continua en $x=0$, no es derivable en dicho punto:

- $f(0) = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-x} = e^0 = 1$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar directamente la derivada:

- $f'_-(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-1) = -1$
- $f'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-x} - 0}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

La función es derivable en $x=0$ por la izquierda, pero no es derivable por la derecha y, por tanto, no es derivable en el punto.

Ejercicio 4: Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

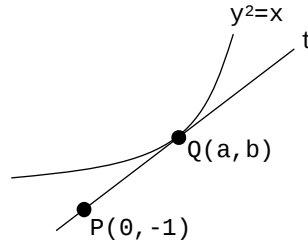
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2+x^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2}{x+1} = \\ &= \frac{2}{3(x^2+2)} + \frac{1}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2-2+x^2+2}{3(x^2+2)(x^2-1)} = \frac{3x^2}{3(x^2+2)(x^2-1)} = \frac{x^2}{x^4+x^2-2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5: Halla la ecuación general de la recta tangente a la cónica $y^2=x$ trazada desde el punto $(0, -1)$.
 (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

El punto P no pertenece a la curva porque no satisface su ecuación. Sea Q(a,b) el punto de tangencia:



Como el punto Q está en la curva, satisface su ecuación: $b^2=a$.

Como el punto Q está en la recta tangente, satisface su ecuación. Ahora bien, de esta recta sólo conocemos el punto P. Por tanto, su ecuación punto-pendiente es $y+1=m(x-0)$. En consecuencia: $b+1=ma$.

Por otro lado, la pendiente de la curva en el punto Q es m:

$$y^2=x \Rightarrow 2yy'=1 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2bm=1 \stackrel{2}{\Rightarrow} m=1/(2b)$$

Por último, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a=b^2 \\ b+1=ma \\ m=1/(2b) \end{cases} \Rightarrow b+1=\frac{1}{2b} \cdot b^2 \Rightarrow 2b+2=b \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ m=-1/4 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación general de la recta tangente es:

$$y+1=-\frac{1}{4} \cdot x \Rightarrow 4y+4=-x \Rightarrow x+4y+4=0$$

¹ En el punto Q, $y=b$ e $y'=m$.

² Ya que $b \neq 0$.