1) (1p) Halla k para que la siguiente función sea continua en el punto x=2:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{|x-2|} & \text{si } x\neq 2 \\ k & \text{si } x=2 \end{cases}$$

2) (2,4p) De la siguiente función, se pide:

a) El estudio de la continuidad y la clasificación de sus discontinuidades

b) Las ecuaciones de sus asíntotas y el estudio de la posición relativa.

$$f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$$

3) (1,6p) Prueba que la ecuación $e^x+2x=2$ tiene solo una solución. Hállala con dos cifras decimales exactas.

4) (1,6p) De la siguiente función, se pide:

a) Su derivada simplificada.

b) La ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa $\pi/4$.

$$f(x)=-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+\ln \operatorname{tg} x$$

5) (1,6p) Comprueba que la función $f(x)=x-x^3$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo [-2,1] y halla el valor intermedio que lo verifica.

6) (1,8p) Halla el punto de inflexión de la función $y=x^3+ax^2+bx+c$ si ésta tiene un extremo en x=1 y la tangente en el punto de abscisa 0 es la recta 15x-y+3=0.

Ejercicio 1: *Halla k para que la siguiente función sea continua en el punto x=2:*

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{|x-2|} & si\ \ x\neq 2 \\ k & si\ \ x=2 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

El límite de la función f en 2 debe coincidir con f(2):

- f(2)=k
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{|x-2|}\overset{1}{=}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{0^{+}}=\operatorname{arc\,tg}(+\infty)=\pi/2$

Por tanto:

$$k=\pi/2$$

[1] Aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 2: *De la siguiente función, se pide: **a)** el estudio de la continuidad y la clasificación de sus discontinuidades; **b)** las ecuaciones de sus asíntotas y el estudio de la posición relativa.*

$$f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$$

(2,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\mathrm{Dom}(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$:

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que si $a\in\mathrm{Dom}(f)$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\ln x}{1-x}=\frac{\ln a}{1-a}=f(a)$$

3º) La recta $x=0$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{1-x}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

4º) La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}\overset{2}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}=-1$$

5º) La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{1-x}\overset{3}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{-1}=\frac{1/+\infty}{-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{\ln x}{1-x}-0=\frac{\ln x}{1-x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

---

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

[2] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse con el cambio de variable $x=1+t$, utilizando luego el hecho de que, en $t=0$, $\ln(1+t)\sim t$.

[3] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 3: *Prueba que la ecuación $e^x+2x=2$ tiene solo una solución. Hállala con dos cifras decimales exactas.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=e^x+2x-2$.

Esta función es continua en R por ser derivable en R:

$$f'(x)=e^x+2$$

Como $f(0)=-1<0$ y $f(1)=e>0$, estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una centésima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	0	1	0,5	0,3	0,4	0,35	0,32	0,31
y	-	+	+	-	+	+	+	-

Como f es continua en $[0{,}31;0{,}32]$ y $f(0{,}31)\cdot f(0{,}32)<0$, por el teorema de Bolzano existe c en $(0{,}31;0{,}32)$ tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow e^c+2c-2=0 \Rightarrow e^c+2c=2$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como c pertenece al intervalo $(0{,}31;0{,}32)$, $c=0{,}31\ldots$

Que la solución es única es una consecuencia del hecho de que la función f es continua y creciente en R, ya que su derivada es siempre positiva. Por tanto, no puede cortar dos veces al eje de abscisas.

* * *

Otra forma de ver esto último es la siguiente.

Supongamos que dicha ecuación tiene más de una solución. Sean a y b ($a<b$) dos de esas soluciones. En ese caso, $e^a+2a-2=0$ y $e^b+2b-2=0$.

Ahora bien, la derivada de la función $f(x)=e^x+2x-2$ es $f'(x)=e^x+2$. Por tanto, f es continua en el cerrado $[a,b]$ por ser derivable en R, es derivable en el abierto (a,b) por serlo en R y $f(a)=f(b)=0$. Por el teorema de Rolle existe c en (a,b) tal que $f'(c)=e^c+2=0$. Pero $e^c+2>0$. Como ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, la ecuación $e^x+2x-2=0$ sólo tiene una solución real.

Ejercicio 4: *De la siguiente función, se pide: **a)** su derivada simplificada; **b)** la ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa $\pi/4$.*

$$f(x) = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + \ln \operatorname{tg} x$$ (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = -\frac{-1\cdot 4\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos x}{4\operatorname{sen}^4 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x}$$

2º) Hallamos la ordenada del punto de tangencia:

$$f(\pi/4) = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2(\pi/4)} + \ln \operatorname{tg}(\pi/4) = -\frac{1}{2(\sqrt{2}/2)^2} + \ln 1 = -\frac{1}{2\cdot 1/2} = -1$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$f'(\pi/4) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3(\pi/4)\cdot\cos(\pi/4)} = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^4} = \frac{1}{4/16} = 4$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi/4$	-1	4

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y+1=4\cdot(x-\pi/4) \Rightarrow y+1=4x-\pi \Rightarrow y=4x-\pi-1$$

Ejercicio 5: *Comprueba que la función $f(x)=x-x^3$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo [-2,1] y halla el valor intermedio que lo verifica.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Derivamos la función:

$$f'(x)=1-3x^2$$

2º) La función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange:

1ª) f es continua en [-2,1] por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en (-2,1) por serlo en R.

Por tanto, existe α en el intervalo abierto (-2,1) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{0-6}{3}=-2$$

Ahora bien:

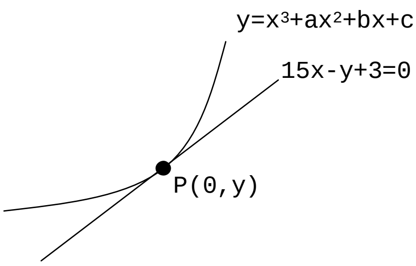
$$f'(\alpha)=-2 \Rightarrow 1-3\alpha^2=-2 \Rightarrow 3=3\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm 1 \overset{1}{\Rightarrow} \alpha=-1$$

[1] Ya que α pertenece al intervalo abierto (-2,1).

Ejercicio 6: *Halla el punto de inflexión de la función $y=x^3+ax^2+bx+c$ si ésta tiene un extremo en $x=1$ y la tangente en el punto de abscisa 0 es la recta $15x-y+3=0$.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:



Como la recta $15x-y+3=0$ es tangente a la gráfica de la función en el punto $P(0,y)$, éste satisface su ecuación:

$$15\cdot 0-y+3=0 \Rightarrow y=3$$

Teniendo en cuenta además la condición necesaria de extremo relativo y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 0 es 15, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'
1		0
0	3	15

Como $y=x^3+ax^2+bx+c$, entonces $y'=3x^2+2ax+b$.

Como el punto (0,3) pertenece a la gráfica de la función y, y los puntos (0,15) y (1,0) pertenecen a la gráfica de la función y', tenemos lo siguiente:

$$y(0)=3 \Rightarrow c=3$$

$$y'(0)=15 \Rightarrow b=15$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \overset{1}{\Rightarrow} 2a=-18 \Rightarrow a=-9$$

Por tanto, $y=x^3-9x^2+15x+3$, $y'=3x^2-18x+15$, $y''=6x-18=6(x-3)$ e $y'''=6$.

Ahora bien, como la condición necesaria de punto de inflexión es que la derivada segunda se anule, $x=3$ es un posible punto de inflexión. Y como $y'''(3)=6\neq 0$, por el criterio de la derivada tercera resulta que el punto de abscisa $x=3$ y ordenada $y=27-81+45+3=-6$ es punto de inflexión.

---

[1] Ya que b=15.