1) (1,6p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$$

2) (1,6p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición relativa:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\ln(1+x)}$$

3) (2p) Encuentra el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en x=0:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot \text{sen}(1/x) & \text{si } x<0 \\ x+\text{sen}(ax)+b & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

4) (1,6p) De la siguiente función, se pide:

a) La derivada simplificada.

b) La ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

$$f(x)=x^{1/x}$$

5) (1,6p) Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas (0,0), (a,0), (a,b) y (0,b). El punto (a,b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y=1/x^2+4$. De todos esos rectángulos, halla el de área mínima.

6) (1,6p) Dada la función $y=x-2\cdot \text{arc}\,\text{tg}\,x$, estudia:

a) La monotonía y los extremos.

b) La concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión.

Ejercicio 1: *Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$$ (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=[-4,5)\cup(5,+\infty)$:

$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\neq 5 \end{cases}$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in Dom(f)$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \frac{\sqrt{a+4}-3}{a-5} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en $x=5$:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} \overset{2}{=} \lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+4}}}{1} = \frac{1}{6}$$

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.
[2] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse multiplicando numerador y denominador por el conjugado del numerador. O con el cambio $x+4=t^2$.

Ejercicio 2: *Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición relativa:*

$$f(x)=\frac{\ln x}{\ln(1+x)}$$ (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(0,+∞):

$$\begin{cases} x>0 \\ 1+x>0 \\ \ln(1+x)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-1 \\ 1+x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x>0$$

2º) La recta x=0 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \overset{1}{=} \frac{\ln 0^+}{\ln(1+0^+)} = \frac{-\infty}{\ln(1^+)} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

3º) La recta y=1 es asíntota horizontal de la función en +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} \overset{3}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{\ln x}{\ln(1+x)}-1=\frac{\ln x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en +∞, ya que el numerador es negativo[4] y el denominador positivo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

[1] Para calcular el límite del denominador hemos aplicado la regla del límite de la composición.
[2] Como sale la expresión indeterminada ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al denominador la regla del límite de la composición.
[3] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación. O teniendo en cuenta que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en +∞ y en -∞.
[4] Como $x<1+x$, entonces $\ln x<\ln(1+x)$, ya que ln es una función creciente.

Ejercicio 3: *Encuentra el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot sen(1/x) & si\ x<0 \\ x+sen(ax)+b & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Si la función f es continua en x=0, entonces b=0:

- f(0)=b
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2\cdot \text{sen}\frac{1}{x}\right) \overset{1}{=} 0;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}[x+\text{sen}(ax)+b] \overset{2}{=} b$

2º) Si la función f es derivable en x=0, entonces a=-1:

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2\cdot\text{sen}(1/x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x\cdot\text{sen}\frac{1}{x}\right)\overset{1}{=} 0$
- $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x+\text{sen}(ax)}{x}\overset{4}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1+a\cdot\cos(ax)}{1}=1+a$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:[5]

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2\cdot\text{sen}(1/x)-b}{x}\overset{6}{=}\frac{-b}{0^-}\overset{7}{\Rightarrow} b=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2\cdot\text{sen}(1/x)-b}{x}\overset{3}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x\cdot\text{sen}\frac{1}{x}\right)\overset{1}{=} 0$$

- $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x+\text{sen}(ax)}{x}\overset{4}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1+a\cdot\cos(ax)}{1}=1+a$

Si la función es derivable, entonces 1+a=0. Llegamos, pues, al mismo resultado que antes.

---

[1] Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada.
[2] Para calcular el límite del segundo sumando hemos aplicado la regla del límite de la composición. Lo mismo sucede en los límites que siguen en los que aparece la expresión sen(ax) o la expresión cos(ax).
[3] Ya que b=0.
[4] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede efectuarse el cociente, 1+sen(ax)/x, aplicar las propiedades de los límites (el límite de una suma es la suma de los límites de los sumandos) y utilizar el hecho de que sen f ~ f si f es un infinitésimo.
[5] Ya que la derivabilidad implica la continuidad.
[6] Ya que el minuendo del numerador es el producto de un infinitésimo por una función acotada.
[7] Si b≠0, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=0.

Ejercicio 4: *De la siguiente función, se pide: **a)** su derivada simplificada; **b)** la ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa 1:*

$$f(x)=x^{1/x}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Hallamos la derivada de la función:

$$f(x)=x^{1/x} \overset{1}{=} e^{(1/x)\cdot \ln x} \Rightarrow f'(x)=e^{(1/x)\cdot \ln x}\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=$$

$$=x^{1/x}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{1/x}$$

2º) Hallamos la ordenada del punto de tangencia:

$$f(1)=1^1=1$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}\cdot 1=1$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	1

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-1=1\cdot(x-1) \Rightarrow y-1=x-1 \Rightarrow y=x$$

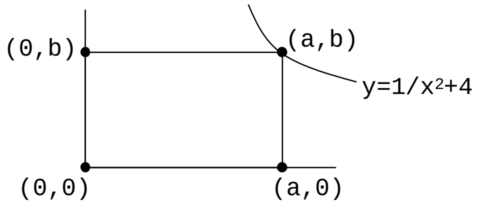
[1] Aunque se puede derivar la función por el método de derivación logarítmica, también podemos hacerlo escribiéndola primero como función exponencial de base e.

Ejercicio 5: *Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas (0,0), (a,0), (a,b) y (0,b). El punto (a,b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y=1/x^2+4$. De todos esos rectángulos, halla el de área mínima.* (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

El vértice (a,b) del rectángulo tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y=1/x^2+4$:



El área del rectángulo es mínima:

$$A=a\cdot b$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable. Ahora bien, como el punto (a,b) pertenece a la gráfica de la función $y=1/x^2+4$, satisface su ecuación:

$$b=\frac{1}{a^2}+4 \Rightarrow A=a\cdot\left(\frac{1}{a^2}+4\right)=\frac{1}{a}+4a=\frac{1+4a^2}{a}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\frac{8a\cdot a-(1+4a^2)}{a^2}=\frac{8a^2-1-4a^2}{a^2}=\frac{4a^2-1}{a^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2-1=0 \Rightarrow 4a^2=1 \Rightarrow a^2=1/4 \overset{1}{\Rightarrow} a=1/2$$

Como[2] $D=a^2>0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir[3] A" por N', donde $N=4a^2-1$:

$$N'=8a \Rightarrow N'(1/2)=4>0 \Rightarrow A \text{ es mínima en } a=1/2$$

Por último:

$$a=1/2 \Rightarrow b=\frac{1}{1/4}+4=4+4=8$$

[1] Ya que a>0.
[2] Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.
[3] Ya que los signos de N' y A" coinciden en a=1/2.

Ejercicio 6: Dada la función $y=x-2\cdot\operatorname{arc\,tg} x$, estudia: a) la monotonía y los extremos; b) la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión. *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a) Para estudiar la monotonía aplicamos el criterio de la derivada primera:

$$y'=1-\frac{2}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{1+x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{1+x^2}$$

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
y' es	+	-	+
y es	creciente	decreciente	creciente

Como la función y es continua en $x=-1$ y $x=1$ (por ser derivable en dichos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera,[1] concluimos que la función tiene un máximo relativo en $x=-1$ que vale $y=\pi/2-1$ y un mínimo relativo en $x=1$ que vale $y=1-\pi/2$.

b) Para estudiar la curvatura aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$y''=\frac{2x\cdot(1+x^2)-(x^2-1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x\cdot(1+x^2-x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y" es	-	+
y es	cóncava	convexa

Como la función y' es continua en $x=0$ (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,[2] concluimos que la función tiene un punto de inflexión en $x=0$, cuya ordenada es $y=0-2\cdot\operatorname{arc\,tg} 0=0$.

[1] El estudio de los extremos puede hacerse también con el criterio de la derivada segunda.
[2] El estudio de los puntos de inflexión puede hacerse también con el criterio de la derivada tercera.