1) (1,6p) Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}-1}{x-1}$$

2) (1,6p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

3) (2p) La función f:

a) ¿Es continua en x=0?

b) ¿Es derivable en x=0?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 2 & \text{si } x=0\end{cases}$$

4) (1,6p) Determina los coeficientes a y b de modo que la recta $4x+y=8$ sea tangente a la curva $y=ax^3+bx^2+ax+b$ en el punto de ordenada 0.

5) (1,6p) Se quiere fabricar un bote de conserva cilíndrico de un litro de capacidad. Calcula el radio y la altura del bote para que la superficie de metal empleado sea mínima.

6) (1,6p) Demuestra que la función $y=x^3-x-\text{sen}(\pi x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo (-1,0). Menciona los resultados teóricos que utilices.

Ejercicio 1: *Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}-1}{x-1}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(0,1)∪(1,+∞):

$$\begin{cases}1/x\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$$

2º) La función f es continua en su dominio, ya que, si a∈Dom(f):[1]

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{\frac{1}{a}}-1}{a-1}=f(a)$$

3º) La función f tiene una discontinuidad evitable en x=1:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}-1}{x-1}\overset{2}{=}\lim_{t\to 1}\frac{\frac{1}{t}-1}{t^2-1}\overset{3}{=}\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{t(t^2-1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{-(t-1)}{t(t+1)(t-1)}=\lim_{t\to 1}\frac{-1}{t(t+1)}=-\frac{1}{2}$$

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

[2] Hacemos el cambio de variable $x=t^2$. También puede multiplicarse numerador y denominador por $\sqrt{x}$, descomponerse el denominador en factores, $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ y simplificar a continuación. O multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador. O por L'Hôpital.

[3] Multiplicamos numerador y denominador por t.

Ejercicio 2: *Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función:*

$$f(x)=\frac{\ln(x-2)}{2-x}$$ (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(2,+∞):

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x>2$$

2º) La recta x=2 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{\ln(x-2)}{2-x}\overset{1}{=}\frac{\ln 0^+}{0^-}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

3º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{2-x}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-2}}{-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2-\infty}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{\ln(x-2)}{2-x}-0=\frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en +∞, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

[1] Par calcular el límite del numerador aplicamos la regla del límite de la composición.
[2] Como sale la expresión indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al numerador la regla del límite de la composición.

Ejercicio 3: *La función f: **a)** ¿es continua en x=0?; **b)** ¿es derivable en x=0?:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{e^x-1} & si\ x\neq 0 \\ 2 & si\ x=0 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) La función es continua en x=0:

- f(0)=2
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{e^x-1} \overset{1}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

b) La función es derivable en x=0 y su derivada es f'(0)=-1:[2]

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x}{e^x-1}-2}{x} \overset{3}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x-2\cdot e^x+2}{x\cdot(e^x-1)} \overset{4}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x-2\cdot e^x+2}{x^2} \overset{5}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cdot e^x}{2x} \overset{6}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot e^x}{2} = \frac{-2\cdot 1}{2} = -1$$

---

1 Ya que, en x=0, $e^x-1 \sim x$. También puede hacerse por L'Hôpital.

2 Al ser la función derivable en x=0, es continua en dicho punto. Por tanto, en este caso, hubiese bastado con hacer sólo este apartado.

3 Multiplicamos numerador y denominador por e^x-1.

4 Ya que, en x=0, $e^x-1 \sim x$.

5 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

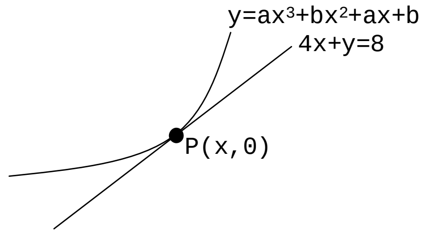
6 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. Si se prefiere, se puede sacar -2 factor común en el numerador y utilizar el hecho de que, en x=0, $e^x-1 \sim x$.

Ejercicio 4: *Determina los coeficientes a y b de modo que la recta $4x+y=8$ sea tangente a la curva $y=ax^3+bx^2+ax+b$ en el punto de ordenada 0.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sea P(x,0) el punto de tangencia:



Como el punto P está en la recta tangente, satisface su ecuación:

$$4x+0=8 \Rightarrow x=2$$

Como la pendiente de la recta tangente es -4, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'
2	0	-4

Si $y=ax^3+bx^2+ax+b$, entonces $y'=3ax^2+2bx+a$.

Como los puntos P(2,-4) y (2,0) pertenecen, respectivamente, a las gráficas de las funciones y' e y, tenemos lo siguiente:

$$y'(2)=-4 \Rightarrow 12a+4b+a=-4 \Rightarrow 13a+4b=-4$$

$$y(2)=0 \Rightarrow 8a+4b+2a+b=0 \Rightarrow 10a+5b=0 \Rightarrow 2a+b=0$$

Por último, resolvemos el sistema:

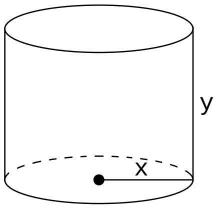
$$\begin{cases} 13a+4b=-4 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13a+4b=-4 \\ b=-2a \end{cases} \Rightarrow 13a-8a=-4 \Rightarrow 5a=-4 \Rightarrow a=-4/5 \Rightarrow b=8/5$$

Ejercicio 5: *Se quiere fabricar un bote de conserva cilíndrico de un litro de capacidad. Calcula el radio y la altura del bote para que la superficie de metal empleado sea mínima.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sean x e y, respectivamente, el radio de la base y la altura del cilindro:



El área total del cilindro tiene que ser mínima:

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable. Ahora bien, como el volumen del cilindro es de 1 litro:

$$1 = \pi x^2 y \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{\pi x^2} \;\Rightarrow\; A = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2}{x}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A' = \frac{6\pi x^2 \cdot x - (2\pi x^3 + 2)\cdot 1}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 4\pi x^3 = 2 \;\Rightarrow\; x^3 = \frac{1}{2\pi} \;\Rightarrow\; x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$$

Como[1] $D = x^2 > 0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir[2] A" por N', donde $N = 4\pi x^3 - 2$:

$$N' = 12\pi x^2 \;\Rightarrow\; N'(1/\sqrt[3]{2\pi}) = 12\pi \cdot 1/\sqrt[3]{4\pi^2} > 0 \;\Rightarrow\; A \text{ es mínima en } x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$$

Por tanto,[3] $x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$ dm e $y = \dfrac{1}{\pi \cdot 1/\sqrt[3]{4\pi^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{4/\pi}$ dm.

---

1 Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.
2 Ya que los signos de N' y A" coinciden en $x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$.
3 Un litro es 1 dm^3.

Ejercicio 6: *Demuestra que la función $y=x^3-x-sen(\pi x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo (-1,0). Menciona los resultados teóricos que utilices.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

$$f'(x)=3x^2-1-\pi\cdot\cos(\pi x)$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (-1,0) tal que $f'(\alpha)=0$.

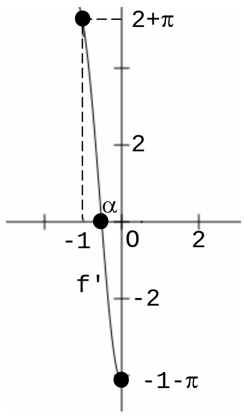
En efecto:

1ª) $f'(-1)\cdot f'(0)<0$:

- $f'(-1)=3-1+\pi=2+\pi>0$.
- $f'(0)=-1-\pi<0$.

2ª) f' es continua en [-1,0]:

- $[-1,0]\subset Dom(f')=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[-1,0]$:



$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}[3x^2-1-\pi\cdot\cos(\pi x)] \stackrel{1}{=} 3a^2-1-\pi\cdot\cos(\pi a)=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

[1] Para calcular el límite de $\cos(\pi x)$ hemos utilizado la regla del límite de la composición.