1) (1,6p) Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$$

2) (1,8p) Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la siguiente función tiene en $-\infty$:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}$$

3) (1,6p) La siguiente función:

a) ¿Es continua en x=0?

b) ¿Es derivable en x=0?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

4) (1,6p) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln(x+\ln x)$ en el punto de abscisa 1.

5) (1,6p) La altura de un triángulo isósceles mide 5 cm y su base (lado desigual), 12 cm. Halla el punto de la altura que verifica la propiedad de que la suma de sus distancias a los tres vértices es mínima.

6) (1,8p) Demuestra que la función $f(x)=e^{x/2}-x^{3/2}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (0,1). Menciona los resultados teóricos que utilices.

Ejercicio 1: *Halla:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\operatorname{sen} x}{x^3}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{x^3\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}\overset{2}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^2/2}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot\cos x}=\frac{1}{2}$$

* * *

También puede hacerse como sigue:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}\overset{3}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos x}{3x^2}\overset{3}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{tg} x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)+\operatorname{sen} x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{tg} x+2\cdot\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{sen} x}{6x}\overset{3}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)+6\cdot\operatorname{tg}^2 x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)+\cos x}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{1}{2}$$

---

1 Multiplicamos numerador y denominador por $\cos x$.

2 Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x\sim x$ y $1-\cos x\sim x^2/2$.

3 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: *Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la siguiente función tiene en $-\infty$:*

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}$$ (1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

La recta $y=-x+1/2$ es la asíntota oblicua de f en $-\infty$:

- $k=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=\sqrt{(-\infty)^2-(-\infty)}=\sqrt{+\infty+\infty}=+\infty$

- $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}\overset{1}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{-x}\overset{2}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=-\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}}=-\sqrt{1+0}=-1$$

- $b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)\overset{1}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\overset{3}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\overset{4}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\sqrt{x^2-x}+x-1/2=\sqrt{x^2-x}-(1/2-x)\overset{5}{=}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-x+1/4}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el sustraendo es mayor que el minuendo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

---

[1] Ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

[2] Ya que, como estamos calculando el límite en $+\infty$, x es positivo. Por tanto: $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

[3] Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

[4] Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

[5] Ya que, en $-\infty$, como $1/2-x>0$, $1/2-x=|1/2-x|=\sqrt{(1/2-x)^2}$.

Ejercicio 3: *La siguiente función: **a)** ¿es continua en x=0?; **b)** ¿es derivable en x=0?:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) La función es continua en x=0:

- $f(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \overset{1}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

b) La función es derivable en x=0 y su derivada es f'(0)=0:[2]

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}-1}{x} \overset{3}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^2} \overset{4}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{2x} \overset{5}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-1-x^2}{2x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2(1+x^2)} = \frac{0}{2} = 0$$

---

[1] Ya que, en x=0, $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$. También puede hacerse por L'Hôpital.
[2] Al ser la función derivable en x=0, es continua en dicho punto. Por tanto, en este caso, hubiese bastado con hacer sólo este apartado.
[3] Multiplicamos numerador y denominador por x.
[4] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
[5] Multiplicamos numerador y denominador por $1+x^2$.

Ejercicio 4: *Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln(x+\ln x)$ en el punto de abscisa 1.* (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1)=\ln(1+\ln 1)=\ln(1+0)=\ln 1=0$$

2º) Para hallar la pendiente, tenemos que derivar la función:

$$y'=\frac{1}{x+\ln x}\cdot(x+\ln x)'=\frac{1}{x+\ln x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+\ln x}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x\cdot(x+\ln x)}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1)=\frac{2}{1\cdot(1+0)}=2$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	0	2

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

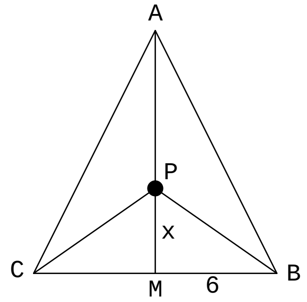
$$y-0=2\cdot(x-1)\ \Rightarrow\ y=2x-2$$

Ejercicio 5: *La altura de un triángulo isósceles mide 5 cm y su base (lado desigual), 12 cm. Halla el punto de la altura que verifica la propiedad de que la suma de sus distancias a los tres vértices es mínima.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sea ABC el triángulo isósceles de base BC=12 cm y altura AM=5 cm, P el punto que andamos buscando y x su distancia a la base:



La suma de las distancias desde P a los tres vértices es mínima:

$$S=PA+PB+PC=5-x+\sqrt{36+x^2}+\sqrt{36+x^2}=5-x+2\sqrt{36+x^2}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$S'=-1+2\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{36+x^2}}=-1+\frac{2x}{\sqrt{36+x^2}}=\frac{2x-\sqrt{36+x^2}}{\sqrt{36+x^2}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=\sqrt{36+x^2} \Rightarrow 4x^2=36+x^2 \Rightarrow 3x^2=36 \Rightarrow x^2=12 \overset{1}{\Rightarrow} x=2\cdot\sqrt{3}$$

Como[2] $D=\sqrt{36+x^2}>0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir[3] S" por N', donde $N=2x-\sqrt{36+x^2}$:

$$N'=2-\frac{2x}{2\cdot\sqrt{36+x^2}}=2-\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} \Rightarrow N'(2\cdot\sqrt{3})=2-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \text{ es mínima en } x=2\cdot\sqrt{3}$$

Por tanto, el punto P está situado a una distancia de la base de $2\cdot\sqrt{3}$ cm.

---

[1] Ya que x>0.
[2] Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.
[3] Ya que los signos de N' y S" coinciden en $x=2\sqrt{3}$.

Ejercicio 6: *Demuestra que la función $f(x)=e^{x/2}-x^{3/2}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (0,1). Menciona los resultados teóricos que utilices.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

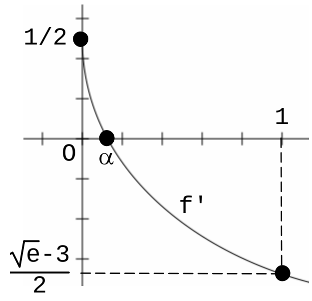
$$f'(x)=e^{x/2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}=\frac{e^{x/2}-3\cdot x^{1/2}}{2}$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (0,1) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(0)\cdot f'(1)<0$:

- $f'(0)=1/2>0$.
- $f'(1)=\frac{e^{1/2}-3}{2}<0$.



2ª) f' es continua en [0,1]:

- $[0,1]\subset Dom(f')=Dom(f)=[0,+\infty)$.
- Si $a\in[0,1]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{e^{x/2}-3\cdot x^{1/2}}{2}=\frac{e^{a/2}-3\cdot a^{1/2}}{2}=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un máximo relativo.