1) (2,5p) Estudia las discontinuidades y las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}$$

2) (2,5p) Dadas las funciones f y g:

a) Prueba que g es la derivada de f.

b) Estudia la monotonía y los extremos de f.

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\cdot \ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2} \qquad g(x)=\frac{x}{x^3+x^2+x+1}$$

3) (2,5p) Calcula las siguientes integrales:

$$\int sen^3x\cdot\cos^2x\cdot dx \qquad \int_0^1 x^2\cdot e^x\cdot dx$$

4) (2,5p) Dada la matriz A:

a) Halla A^n.

b) Estudia el rango de A según los valores del parámetro.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: *Estudia las discontinuidades y las asíntotas de la función:*

$$f(x)=\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}$$ *(2,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) La función es continua en su dominio, ya que si $a\in Dom(f)$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}=\frac{e^{2/a}-1}{e^{2/a}+1}=f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto finito en x=0 y, por tanto, carece de asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}=\frac{e^{2/0^-}-1}{e^{2/0^-}+1}=\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}\overset{2}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2/x}\cdot(2/x)'}{e^{2/x}(2/x)'}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1$$

4º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en $+\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}=\frac{e^{2/\pm\infty}-1}{e^{2/\pm\infty}+1}=\frac{e^0-1}{e^0+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}-0=\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, pues numerador y denominador son positivos[3], la función se encuentra situada por encima de la asíntota; y como la diferencia es negativa en $-\infty$, pues el numerador es negativo y el denominador positivo[4], la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

---

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.
[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando factor común $e^{2/x}$ en numerador y denominador, simplificando a continuación.
[3] Ya que la función exponencial de exponente positivo es mayor que 1.
[4] Ya que la función exponencial es siempre positiva; y si el exponente es negativo, menor que 1.

Ejercicio 2: *Dadas las funciones f y g:* ***a)*** *prueba que g es la derivada de f;* ***b)*** *estudia la monotonía y los extremos de f.*

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\cdot \ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2} \qquad g(x)=\frac{x}{x^3+x^2+x+1} \qquad \text{(2,5 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\cdot\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{(x+1)^2}{4(x^2+1)}\cdot\frac{2x(x+1)^2-(x^2+1)2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)}\cdot\frac{2x(x+1)-2(x^2+1)}{x+1}=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{2x^2+2x-2x^2-2}{4(x^2+1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{2(x-1)}{4(x^2+1)(x+1)}=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x+1+x-1}{2(x^2+1)(x+1)}=\frac{2x}{2(x^2+1)(x+1)}=\frac{x}{x^3+x^2+x+1}=g(x)$$

b) Para estudiar la monotonía utilizamos el criterio de la derivada primera:

$$f'(x)=\frac{x}{(x^2+1)(x+1)}$$

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
f' es	+	-	+
f es	creciente	decreciente	creciente

Como f es continua en x=0 (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera,[1] la función tiene un mínimo en x=0 que vale y=0:

$$y=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg} 0+\frac{1}{4}\cdot \ln 1=0+0=0$$

[1] El estudio de los extremos también puede hacerse por el criterio de la derivada segunda.

Ejercicio 3: *Calcula las siguientes integrales:*

$$\int sen^3x\cdot cos^2x\cdot dx \qquad \int_0^1 x^2\cdot e^x\cdot dx$$ (2,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\int sen^3x\cdot cos^2x\cdot dx=\int sen^2x\cdot cos^2x\cdot sen\,x\cdot dx=\int(1-cos^2x)\cdot cos^2x\cdot sen\,x\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=\int(cos^2x-cos^4x)\cdot sen\,x\cdot dx=\int cos^4x\cdot(-sen\,x)\cdot dx-\int cos^2x\cdot(-sen\,x)\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=\frac{cos^5x}{5}-\frac{cos^3x}{3}+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{cos^5x}{5}-\frac{cos^3x}{3}\right)'=\frac{5\cdot cos^4x\cdot(-sen\,x)}{5}-\frac{3\cdot cos^2x\cdot(-sen\,x)}{3}=$$

$$=-sen\,x\cdot cos^4x+sen\,x\cdot cos^2x=sen\,x\cdot cos^2x\cdot(1-cos^2x)=sen^3x\cdot cos^2x$$

b)

$$\int_0^1 x^2\cdot e^x\cdot dx \overset{3}{=} \left[(x^2-2x+2)\cdot e^x\right]_0^1=(1-2+2)e-2=e-2$$

* * *

$$\int x^2\cdot e^x\cdot dx \overset{4}{=} x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=(x^2-2x+2)\cdot e^x+C$$

S	D	I
+	x^2	e^x
-	$2x$	e^x
+	2	e^x
-	0	e^x

Comprobación:

$$\left[(x^2-2x+2)\cdot e^x\right]'=(2x-2)\cdot e^x+(x^2-2x+2)\cdot e^x=e^x\cdot(2x-2+x^2-2x+2)\cdot e^x=x^2\cdot e^x$$

---

[1] Se puede hacer también con el cambio de variable $cos\,x=t$, $-sen\,x\cdot dx=dt$.

[2] Se trata de dos integrales casi inmediatas de tipo potencial.

[3] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

[4] Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo exponencial.

Ejercicio 4: *Dada la matriz A:* ***a)*** *halla A^n;* ***b)*** *estudia el rango de A según los valores del parámetro*

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

(2,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$A^1=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^3 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^3 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^4 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{pmatrix}$$

b) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \overset{1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1-a} \end{pmatrix} \to \begin{cases} a=0 \\ 1-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el rango de A es 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2º) Si a=1, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el rango de A es 3.

1 2ªf-1ªf.