

1) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}-1}$$

2) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln(x^2 + \ln x)$ en el punto de abscisa 1.

3) Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

4) Calcula el área de la región del plano que determinan en el primer cuadrante las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

5) Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ x+a^2y=a+1 \end{cases}$$

6) Estudia el rango de la matriz A según sea el valor del parámetro k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

¹ Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}-1}$$

* * *

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}-1} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x/2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) = -2$$

¹ Ya que, si f es un infinitésimo, $\operatorname{sen} f \sim f$ y $\sqrt[n]{1+f}-1 \sim f/n$. También puede hacerse multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador y teniendo en cuenta luego que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$. O por L'Hôpital.

Ejercicio 2: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln(x^2+\ln x)$ en el punto de abscisa 1.

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1)=\ln(1+\ln 1)=\ln 1=0$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$y'=\frac{2x+1/x}{x^2+\ln x} \stackrel{1}{=} \frac{2x^2+1}{x^3+x \cdot \ln x}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1)=\frac{2+1}{1+\ln 1}=\frac{3}{1}=3$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	0	3

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-0=3 \cdot (x-1) \Rightarrow y=3x-3$$

¹ Multiplicamos numerador y denominador por x.

Ejercicio 3: Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

* * *

Solución:

Para estudiar la concavidad y la convexidad aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x+1)2x}{x^4} = \frac{x - 2(x+1)}{x^3} = \frac{x - 2x - 2}{x^3} = \frac{-x - 2}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'' = \frac{-x^3 - (-x - 2)3x^2}{x^6} = \frac{-x + 3(x+2)}{x^4} = \frac{2x + 6}{x^4} = \frac{2(x+3)}{x^4}$$

Intervalos	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, +\infty)$
f'' es	-	+	+
f es	cóncava	convexa	convexa

Como la función f' es continua en $x=-3$ (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,¹ la función tiene un punto de inflexión en $x=-3$, cuya ordenada es $y=(-3+1)/9=-2/9$.

¹ El estudio del punto de inflexión también puede hacerse con el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 4: Calcula el área de la región del plano que determinan en el primer cuadrante las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=-x^2+2x$.

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y=x^3 \\ y=-x^2+2x \end{cases} &\Rightarrow x^3=-x^2+2x \Rightarrow x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2+x-2)=0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

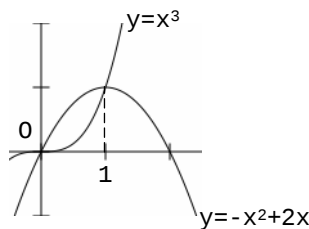
2º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
1/2	1/8	3/4

3º) Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (-x^2+2x-x^3) \cdot dx \stackrel{1}{=} \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{-4+12-3}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Representación gráfica:



¹ Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 5: Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ x+a^2y=a+1 \end{cases}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a^2-a & a \end{array}\right) \xrightarrow{2} a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:³

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a=1$, el sistema es incompatible:⁴

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ (a^2-a)y=a \end{cases} \Rightarrow y=\frac{a}{a(a-1)} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-ay=1-\frac{a}{a-1}=\frac{a-1-a}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{a-1}}$$

¹ $2^{af}-1^{af}$.

² Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

³ Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

⁴ Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: Estudia el rango de la matriz A según sea el valor del parámetro k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & -2k & k \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=0$, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) Si $k=2$, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el rango de A es 3.

¹ $3^{af} - k \cdot 1^{af}$.

² $3^{af} + 2 \cdot 2^{af}$.

³ $3^{af} - 2 \cdot 2^{af}$.