1) (2p) Halla:

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{-x^3+3x^2+1} \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

2) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$y= x+\frac{5}{2}\cdot\ln(x^2-2x+8)-\sqrt{7}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{7}}$$

3) (1,5p) De todos los puntos de la parábola $y=1-x^2$ situados entre los puntos A(1,0) y B(0,1) halla el que está más próximo al origen de coordenadas.

4) (2p) Dados P y Q, halla P+Q y P-Q:

$$P=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\cdot dx \qquad\qquad Q=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 x\cdot dx$$

5) (1,5p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+az=1-a \\ ax+z=1-a \\ ax+y+z=2-a \end{array}\right\}$$

6) (1,5p) Calcula la matriz X en la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: Halla:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{-x^3+3x^2+1} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{-x^3+3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{x^3(-1+3/x+1/x^3)}=(+\infty)^{+\infty(-1+0+0)}=(+\infty)^{-\infty}=0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\overset{1}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\overset{2}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{-\sqrt{1-0}}=\frac{1}{-1}=-1$$

[1] Puede aplicarse la fórmula $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)$. Aunque también puede hacerse como sigue.

[2] Ya que, como $x<0$, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

Ejercicio 2: Deriva y simplifica la función:

$$y=x+\frac{5}{2}\cdot \ln(x^2-2x+8)-\sqrt{7}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{7}}$$ (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$y'=1+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2x+8}\cdot(x^2-2x+8)'-\sqrt{7}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right)'=$$

$$=1+\frac{5}{2}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+8}-\sqrt{7}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}=1+\frac{5}{2}\cdot\frac{2(x-1)}{x^2-2x+8}-\frac{7}{7+x^2-2x+1}=$$

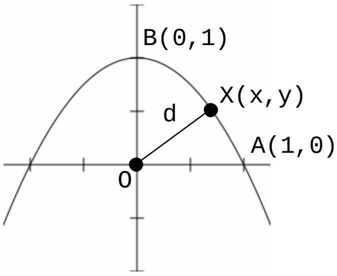
$$=1+\frac{5x-5}{x^2-2x+8}-\frac{7}{x^2-2x+8}=\frac{x^2-2x+8+5x-5-7}{x^2-2x+8}=\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+8}$$

Ejercicio 3: *De todos los puntos de la parábola $y=1-x^2$ situados entre los puntos A(1,0) y B(0,1) halla el que está más próximo al origen de coordenadas.* (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea d la distancia al origen de coordenadas de un punto cualquiera X(x,y) de la parábola:



La distancia de O a X tiene que ser mínima:

$$d=d(O,X)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Tenemos que expresar la distancia en función de una sola variable. Ahora bien, como X pertenece a la parábola, satisface su ecuación. Por tanto:

$$y=1-x^2 \Rightarrow x^2=1-y \Rightarrow d=\sqrt{1-y+y^2}$$

Como d>0, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=1-y+y^2$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=-1+2y=0 \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=1/2$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en y=1/2:

$$C''=2 \Rightarrow C''(1/2)=2>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } y=1/2$$

Por último:

$$y=1/2 \Rightarrow x^2=1-1/2=1/2 \Rightarrow x=\pm 1/\sqrt{2} \overset{2}{\Rightarrow} X(1/\sqrt{2},1/2)$$

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
[2] Ya que X está en el primer cuadrante.

Ejercicio 4: *Dados P y Q, halla P+Q y P-Q:*

$$P=\int_0^{\pi/2}\cos^2x\cdot dx \qquad Q=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2x\cdot dx$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$P+Q=\int_0^{\pi/2}\cos^2x\cdot dx+\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2x\cdot dx=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)\cdot dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}1\cdot dx \overset{1}{=} [x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

b)

$$P-Q \overset{2}{=} \int_0^{\pi/2}\cos^2x\cdot dx-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2x\cdot dx=\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)\cdot dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\cdot dx \overset{3}{=} \left[\frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{\pi/2}=\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}0\right)=0-0=0$$

* * *

$$\int\cos(2x)\cdot dx \overset{4}{=} \frac{1}{2}\cdot\int\cos(2x)\cdot 2\cdot dx \overset{5}{=} \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(2x)+C$$

---

1 Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.
2 Aunque este apartado se puede hacer calculando la integral de $\cos^2x$ por partes, también puede hacerse como sigue.
3 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
4 Multiplicamos y dividimos por 2.
5 Se trata de una integral casi inmediata de tipo seno. También puede hacerse con el cambio de variable $2x=t$, $2\cdot dx=dt$.

***Ejercicio 5:** Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:*

$$\left.\begin{aligned} ax+y+az&=1-a\\ ax+z&=1-a\\ ax+y+z&=2-a \end{aligned}\right\}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & a & 1-a\\ a & 0 & 1 & 1-a\\ a & 1 & 1 & 2-a \end{array}\right) \underset{\sim}{1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a} & 1 & a & 1-a\\ 0 & \mathbf{-1} & 1-a & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1-a} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \begin{cases} a=0\\ 1-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0\\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[3]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} y=1\\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha\\ y=1\\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado.

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
[2] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tendríamos que despejar luego (caso 3º) si tuviésemos que resolver este caso.
[3] Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.
[4] 2ªf+1ªf.
[5] 3ªf-2ªf.
[6] Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: *Calcula la matriz X en la igualdad:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right) \overset{6}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-4+9 & -8-10+18 & -4-4+9 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & -2+2+0 \\ 2-4+3 & 4-10+6 & 2-4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

También puede hacerse de la siguiente manera. Si $A \cdot X = B$ es la ecuación matricial planteada, se calcula por Gauss la inversa de A y se despeja X:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

1 1ªf↔3ªf.
2 2ªf+1ªf; 3ªf+2·1ªf.
3 3ªf-6·2ªf.
4 2ªf+3ªf; 1ªf+3ªf.
5 1ªf-2·2ªf.
6 1ªf·(-1); 3ªf·(-1).