

1) (2p) Estudia la continuidad y halla las asíntotas de la función:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3^{1/x} + 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$y = \sqrt{1+x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

3) (1,5p) De todos los conos de generatriz $\sqrt{3}$ calcula el volumen del que lo tiene máximo.

4) (2p) Calcula:

$$\int (1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot dx \qquad \int (x^2 + 5x + 6) \cdot \cos x \cdot dx$$

5) (1,5p) Estudia, según los valores de k, el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) (1,5p) Halla X:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: Estudia la continuidad y halla las asíntotas de la función:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3^{1/x}+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

2º) La función es continua en su dominio, por tanto, no tiene asíntotas verticales:

- Si $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{3^{1/x}+1} = \frac{a}{3^{1/a}+1} = g(a)$

- Si $a = 0$:

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{3^{1/x}+1} = \frac{0}{3^{1/0^-}+1} = \frac{0}{3^{-\infty}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{3^{1/x}+1} = \frac{0}{3^{1/0^+}+1} = \frac{0}{3^{+\infty}+1} = \frac{0}{+\infty+1} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

3º) La recta $y = x/2 - (\ln 3)/4$ es asíntota oblicua de g en $+\infty$ y $-\infty$:

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{3^{1/x}+1} = \frac{\pm\infty}{3^{1/\pm\infty}+1} = \frac{\pm\infty}{3^0+1} = \frac{\pm\infty}{1+1} = \pm\infty$

- $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{3^{1/x}+1} = \frac{1}{3^{1/\pm\infty}+1} = \frac{1}{3^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

- $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{3^{1/x}+1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - x - x \cdot 3^{1/x}}{2 \cdot (3^{1/x}+1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1-3^{1/x})}{2 \cdot (3^{1/x}+1)} \stackrel{1}{=} \frac{1}{2}$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x(1-3^{1/x})]}{2 \cdot (3^{1/\pm\infty}+1)} \stackrel{2}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1-3^{1/x})}{1/x}}{2 \cdot (3^0+1)} \stackrel{3}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3^{1/x} \cdot \ln 3 \cdot (1/x)'}{(1/x)'} }{2 \cdot (1+1)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3^{1/x} \cdot \ln 3]}{4} = \frac{-3^{1/\pm\infty} \cdot \ln 3}{4} = \frac{-3^0 \cdot \ln 3}{4} = \frac{-\ln 3}{4}$$

¹ Por las propiedades de los límites.

² Transformamos la indeterminación $\infty \cdot 0$ en $0/0$. También puede hacerse utilizando el hecho de que, si f es un infinitésimo, $e^f - 1 \sim f$, ya que $1 - 3^{1/x} = 1 - e^{(1/x) \cdot \ln 3} = -(e^{(1/x) \cdot \ln 3} - 1)$.

³ Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: Deriva y simplifica la función:

$$y = \sqrt{1+x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot x - (1+\sqrt{1+x^2}) \cdot 1}{x^2} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2} \stackrel{1}{=} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2} - 1 - x^2}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{-(1+\sqrt{1+x^2})}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2+1}{x \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \end{aligned}$$

¹ Multiplicamos el numerador y el denominador de la última fracción por $\sqrt{1+x^2}$.

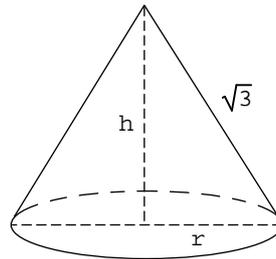
Ejercicio 3: De todos los conos de generatriz $\sqrt{3}$ calcula el volumen del que lo tiene máximo.

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean h y r , respectivamente, la altura y el radio de la base del cono:



El volumen tiene que ser máximo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

Tenemos que expresar el volumen en función de una sola variable:

$$3 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 3 - h^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi (3 - h^2) h = \frac{3\pi h - \pi h^3}{3}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$V' = \frac{3\pi - 3\pi h^2}{3} = \pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow \pi = \pi h^2 \Rightarrow h^2 = 1 \stackrel{1}{\Rightarrow} h = 1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,² derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $h=1$:

$$V'' = -2\pi h \Rightarrow V''(1) = -2\pi < 0 \Rightarrow V \text{ es máximo en } h=1$$

Por último:

$$h=1 \Rightarrow r^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2} \stackrel{3}{\Rightarrow} r = \sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{2\pi}{3}$$

¹ Ya que $h > 0$.

² También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

³ Ya que $r > 0$.

Ejercicio 4: Calcula:

$$\int (1+\operatorname{tg} x)^2 \cdot dx \qquad \int (x^2+5x+6) \cdot \cos x \cdot dx \qquad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:**a)**

$$\begin{aligned} \int (1+\operatorname{tg} x)^2 \cdot dx &= \int (1+2 \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) \cdot dx + 2 \cdot \int \operatorname{tg} x \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= \operatorname{tg} x + 2 \cdot \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot dx = \operatorname{tg} x - 2 \cdot \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot dx \stackrel{2}{=} \operatorname{tg} x - 2 \cdot \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$(\operatorname{tg} x - 2 \cdot \ln |\cos x|)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x = (1 + \operatorname{tg} x)^2$$

b)

$$\begin{aligned} \int (x^2+5x+6) \cdot \cos x \cdot dx &\stackrel{3}{=} (x^2+5x+6) \cdot \operatorname{sen} x + (2x+5) \cdot \cos x - 2 \cdot \operatorname{sen} x + C = \\ &= (x^2+5x+4) \cdot \operatorname{sen} x + (2x+5) \cdot \cos x + C \end{aligned}$$

| S | D | I |
|---|------------|-------------------------|
| + | x^2+5x+6 | $\cos x$ |
| - | $2x+5$ | $\operatorname{sen} x$ |
| + | 2 | $-\cos x$ |
| - | 0 | $-\operatorname{sen} x$ |

Comprobación:

$$\begin{aligned} [(x^2+5x+4) \cdot \operatorname{sen} x + (2x+5) \cdot \cos x]' &= \\ &= (2x+5) \cdot \operatorname{sen} x + (x^2+5x+4) \cdot \cos x + 2 \cdot \cos x - (2x+5) \cdot \operatorname{sen} x = \\ &= (x^2+5x+6) \cdot \cos x \end{aligned}$$

¹ La primera integral es inmediata de tipo tangente.

² La integral es casi inmediata de tipo logaritmo. También puede hacerse con el cambio de variable $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x \cdot dx = dt$.

³ Esta integral se hace por partes. Las integrales realizadas en la columna I son inmediatas de tipo seno y coseno.

Ejercicio 5: Estudia, según los valores de k , el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 0 & -k & -1-k \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=0$, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) Si $k=1$, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el rango de A es 3.

¹ $3^{\text{af}} - (1+k) \cdot 1^{\text{af}}$.

² $3^{\text{af}} + 2^{\text{af}}$.

³ $2^{\text{af}} \leftrightarrow 3^{\text{af}}$.

Ejercicio 6: Halla X:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{6}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ -1/4 & 1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ -1/4 & 1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -3+0+1 & 2+0+0 \\ 1/2-1/2+0 & 0+2+0 & -3/2+5/2+1 & 1+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Si $A \cdot X = B$ es la ecuación dada, también puede resolverse dicha ecuación hallando primero la inversa de A por el método de Gauss y despejando X:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

-
- 1 $1^{\text{af}} \leftrightarrow 2^{\text{af}}$.
 - 2 $2^{\text{af}} - 2 \cdot 1^{\text{af}}$.
 - 3 $2^{\text{af}} + 3^{\text{af}}$; $1^{\text{af}} - 3^{\text{af}}$.
 - 4 $1^{\text{af}} \cdot 2$.
 - 5 $1^{\text{af}} + 2^{\text{af}}$.
 - 6 $1^{\text{af}} \cdot 1/2$; $2^{\text{af}} \cdot (-1/4)$.