1) (1,6p) Halla k para que se verifique:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}+x\right)=4$$

2) (1,8p) Dada la ecuación $2-x=\ln x$:

a) Prueba que tiene solución.

b) Prueba que tiene solo una solución.

c) Hállala con un error menor que 1/2.

3) (1,6p) Deriva la siguiente función y simplifica el resultado:

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

4) (1,6p) Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}$$

5) (1,6p) Encuentra el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $y=\operatorname{tg} x$, la recta $x=\pi/3$ y el eje de abscisas.

6) (1,8p) Dada la matriz A, resuelve la ecuación $A\cdot X=X+I$ y comprueba la solución (I es la matriz unidad de orden 3):

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: *Halla k para que se verifique:*

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}+x\right)=4$$ (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}+x\right) \overset{1}{=} \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-kx}-x\right) \overset{2}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-kx-x^2}{\sqrt{x^2-kx}+x} \overset{3}{=}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-kx}{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{k}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-k}{\sqrt{1-\frac{k}{x}}+1} = \frac{-k}{\sqrt{1-0}+1} = -k/2$$

Por tanto:

$$-k/2=4 \Rightarrow k=-8$$

---

1 Ya que $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

2 Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

3 Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

Ejercicio 2: *Dada la ecuación $2-x=\ln x$: **a)** prueba que tiene solución; **b)** prueba que tiene solo una solución; **c)** hállala con un error menor que 1/2.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a) Consideramos la función $f(x)=2-x-\ln x$, cuyo dominio es $(0,+\infty)$.

Evidentemente, $f'(x)=-1-1/x$ y $\mathrm{Dom}(f')=(0,+\infty)$.

Por otro lado, $f(1)=2-1-\ln 1=1>0$ y $f(2)=2-2-\ln 2=-\ln 2<0$.

Como f es continua en $[1,2]$, por ser derivable en su dominio, y $f(1)\cdot f(2)<0$, entonces, por el teorema de Bolzano, existe c en $(1,2)$ tal que $f(c)=0$. Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow 2-c-\ln c=0 \Rightarrow 2-c=\ln c$$

Por tanto, c es solución de la ecuación de partida.

b) Como $f'(x)=-1-1/x<0\ \forall x\in(0,+\infty)$, la función f es continua y decreciente en su dominio. En consecuencia, no puede cortar al eje de abscisas en más de un punto. Por tanto, c es la única solución de la ecuación.

c) Una solución aproximada con un error menor que 1/2 es 1,5.

* * *

Otra forma de ver que la solución es única es la siguiente.

Supongamos que dicha ecuación tiene más de una solución. Sean a y b $(0<a<b)$ dos de esas soluciones. Entonces: $2-a-\ln a=0$ y $2-b-\ln b=0$.

Ahora bien, la derivada de la función f es $f'(x)=-1-1/x$. Por tanto, f es continua en el cerrado $[a,b]$ por ser derivable en $(0,+\infty)$, es derivable en el abierto (a,b) por serlo en $(0,+\infty)$ y $f(a)=f(b)=0$. Por el teorema de Rolle, existe c en (a,b) tal que $f'(c)=-1-1/c=0$. Pero como $c>0$, $-1-1/c<0$. Como ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, la ecuación $2-x-\ln x=0$ sólo tiene una solución real.

Ejercicio 3: *Deriva la siguiente función y simplifica el resultado:*

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de derivación logarítmica:[1]

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{2}{\Rightarrow} \ln y = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{3}{\Rightarrow} \frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \overset{4}{=} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1} \Rightarrow y'=\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

[1] También puede derivarse escribiéndola primero como una función potencial-exponencial.
[2] Por las propiedades de los logaritmos.
[3] Aplicamos el método de derivación implícita.
[4] Multiplicamos por x el numerador y el denominador de la última fracción.

Ejercicio 4: *Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:*

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}$$ *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\cdot dx=\int(1+\ln x)^{1/3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \overset{1}{=} \frac{(1+\ln x)^{1/3+1}}{1/3+1}+C=\frac{3}{4}\cdot(1+\ln x)^{4/3}+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{3}{4}\cdot(1+\ln x)^{4/3}\right)'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot(1+\ln x)^{1/3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}$$

[1] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $1+\ln x=t^3$, $(1/x)\cdot dx=3t^2\cdot dt$. O $1+\ln x=t$, $(1/x)\cdot dx=dt$.

Ejercicio 5: *Encuentra el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $y=\operatorname{tg} x$, la recta $x=\pi/3$ y el eje de abscisas.*

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\operatorname{tg} x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x=0 \Rightarrow x=0+k\pi \Rightarrow x=0$$

2º) Averiguamos entre 0 y $\pi/3$ qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
$\pi/4$	1	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^{\pi/3}(\operatorname{tg} x-0)\cdot dx=\int_0^{\pi/3}\operatorname{tg} x\cdot dx \overset{1}{=} [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/3}=$$

$$=-\ln|\cos(\pi/3)|+\ln|\cos 0|=-\ln(1/2)+\ln 1=-\ln 1+\ln 2=\ln 2$$

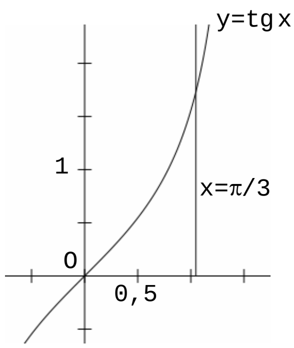
* * *

$$\int \operatorname{tg} x\cdot dx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot dx=-\int\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot dx \overset{2}{=} -\ln|\cos x|+C$$

Comprobación:

$$(-\ln|\cos x|)'=-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)=\operatorname{tg} x$$

Representación gráfica:



[1] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

[2] Se trata de una integral casi inmediata de tipo logaritmo. También puede hacerse con el cambio de variable $\cos x=t$, $-\operatorname{sen} x\cdot dx=dt$.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A, resuelve la ecuación A·X=X+I y comprueba la solución (I es la matriz unidad de orden 3):*

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Despejamos X:

$$A\cdot X=X+I \Rightarrow A\cdot X-X=I \Rightarrow (A-I)\cdot X=I \Rightarrow X=(A-I)^{-1}\cdot I=(A-I)^{-1}$$

Ahora bien:

$$A-I=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss para calcular la inversa de A-I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-2&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-2&1&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&-2&1&0&1&0\end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&2\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-2\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&2\end{array}\right)\rightarrow X=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+0-2&-2+0+1&-4+0+2\\0+1-2&0+0+1&0-1+2\\3-1-4&-1+0+2&-2+1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$X+I=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$$

1 3ªf-1ªf.
2 2ªf↔3ªf.
3 3ªf+2·2ªf.
4 1ªf-3ªf.