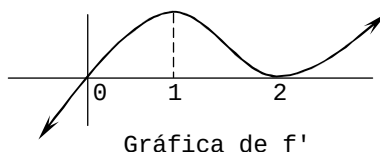


1) (2p) Estudia el comportamiento de la función $f(x)=x \cdot e^x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

2) (2p) De la función f se pide (la gráfica que está dibujada es la de su derivada):

- a) Intervalos de monotonía.
- b) Extremos relativos.
- c) Intervalos de concavidad y convexidad.
- d) Puntos de inflexión.



3) (1p) Encuentra la ecuación implícita de la recta tangente a la curva $2y=1+xy^3$ en el punto de ordenada 1.

4) (1p) Halla la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

5) (1,5p) Calcula el área de la región del plano limitada por los ejes coordenados y la gráfica de la función $y=(x+2) \cdot e^x$.

6) (1,2p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+(1-a)y=-1 \\ -ax+(a^2-a)y=1 \end{cases}$$

7) (1,3p) Dada la matriz A , halla a , b y c si se sabe que $A^{-1}=A'$:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: Estudia el comportamiento de la función $f(x)=x \cdot e^x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. (2 Puntos)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.

2º) La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función en $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x \cdot e^{-x}) \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = \frac{-1}{e^{+\infty}} = \frac{-1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = x \cdot e^x - 0 = x \cdot e^x$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que e^x es positiva, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

3º) La función tiene en $+\infty$ una rama parabólica en la dirección del eje OY:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^x) = (+\infty \cdot e^{+\infty}) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

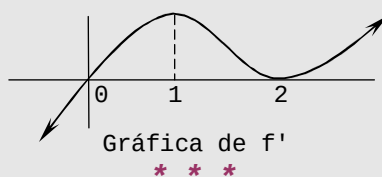
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$$

¹ Ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$.

² Transformamos la indeterminación $-\infty \cdot 0$ en la indeterminación $-\infty / +\infty$.

³ Como sale la indeterminación ∞ / ∞ , aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: De la función f se pide (la gráfica que está dibujada es la de su derivada): **a)** intervalos de monotonía; **b)** extremos relativos; **c)** intervalos de concavidad y convexidad; **d)** puntos de inflexión.



(2 PUNTOS)

Solución:

1º) Aplicamos el criterio de la derivada primera (para el estudio de la monotonía):

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
f' es	-	+	+
f es	decreciente	creciente	creciente

Como la función f es continua en $x=0$ y en $x=2$ (por ser derivable en ambos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, la función tiene un mínimo en $x=0$ y es creciente en $x=2$. Por tanto, es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

2º) Aplicamos el criterio de la derivada primera (para el estudio de la curvatura y los puntos de inflexión):

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
f' es	creciente	decreciente	creciente
f es	convexa	cóncava	convexa

Como la función f' tiene extremos relativos en $x=1$ y $x=2$, f tiene puntos de inflexión en $x=1$ y $x=2$.

Ejercicio 3: Encuentra la ecuación implícita de la recta tangente a la curva $2y=1+xy^3$ en el punto de ordenada 1.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la abscisa del punto de tangencia:

$$2y=1+xy^3 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2=1+x \Rightarrow x=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:²

$$2y=1+xy^3 \Rightarrow 2y'=y^3+3xy^2y'$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$2y'=y^3+3xy^2y' \stackrel{3}{\Rightarrow} 2y'=1+3y' \Rightarrow y'=-1$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	-1

4º) Por tanto, la ecuación implícita de la recta tangente es:

$$y-1=-1 \cdot (x-1) \Rightarrow y-1=-x+1 \Rightarrow x+y-2=0$$

¹ Ya que $y=1$.

² Por el método de derivación implícita.

³ Ya que $x=1$ e $y=1$.

Ejercicio 4: Halla la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

* * *

(1 PUNTO)

Solución:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot dx \stackrel{1}{=} \int \frac{1/x}{\ln x} \cdot dx \stackrel{2}{=} \ln |\ln x| + C$$

Comprobación:

$$(\ln |\ln x|)' = \frac{1}{|\ln x|} \cdot |\ln x|' = \frac{1}{|\ln x|} \cdot \frac{|\ln x|}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

¹ Dividimos numerador y denominador por x.

² Se trata de una integral casi inmediata de tipo logarítmico. También puede hacerse con el cambio de variable $\ln x = t$, $(1/x) \cdot dx = dt$.

Ejercicio 5: Calcula el área de la región del plano limitada por los ejes coordenados y la gráfica de la función $y=(x+2) \cdot e^x$. (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=(x+2) \cdot e^x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x+2) \cdot e^x=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

2º) Averiguamos entre -2 y 0 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y ₁	y ₂
-1	1/e	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-2}^0 [(x+2) \cdot e^x - 0] \cdot dx = \int_{-2}^0 (x+2) \cdot e^x \cdot dx \stackrel{2}{=} [(x+1)e^x]_{-2}^0 = (1 \cdot e^0) - (-1 \cdot e^{-2}) = 1 + e^{-2}$$

* * *

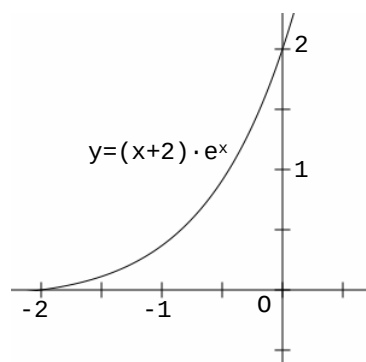
$$\int (x+2) \cdot e^x \cdot dx \stackrel{3}{=} (x+2) \cdot e^x - e^x + C = (x+2-1) \cdot e^x + C = (x+1) \cdot e^x + C$$

S	D	I
+	x+2	e ^x
-	1	e ^x
+	0	e ^x

Comprobación:

$$[(x+1) \cdot e^x]' = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

Representación gráfica:



¹ Ya que e^x es siempre positivo.

² Calculamos la correspondiente integral indefinida aparte.

³ Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo exponencial.

Ejercicio 6: Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+(1-a)y=-1 \\ -ax+(a^2-a)y=1 \end{cases}$$

* * *

(1, 2 PUNTOS)

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-a & -1 \\ -a & a^2-a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{2} 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:³

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow x=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a \neq 1$, el sistema es incompatible.

¹ $2af+a \cdot 1af$.

² Si $1-a \neq 0$, el sistema es incompatible. Estudiamos primero los demás casos.

³ Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

Ejercicio 7: Dada la matriz A , halla a , b y c si se sabe que $A^{-1}=A'$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$$

(1, 3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A \cdot A^{-1} = I \stackrel{1}{\Rightarrow} A \cdot A' = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & ab+c \\ ab+c & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ ab+c=0 \\ ab+c=0 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=0 \\ ab+c=0 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=\pm 1 \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¹ Ya que $A^{-1}=A'$.