1) (1,3p) Dada la función $f(x)=x\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)+2x$, prueba que existe α en (1,2) tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

2) (1,2p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

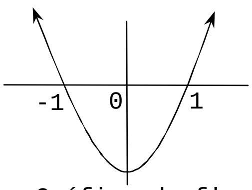
$$f(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{1-x}}$$

3) (1,3p) Calcula los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en x=1:

$$f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & \text{si } x<1 \\ \ln x+2\cos(\pi x) & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

4) (1,2p) De la función f se pide (la gráfica que está dibujada es la de su derivada):

a) Intervalos de monotonía.
b) Extremos relativos.
c) Intervalos de concavidad y convexidad.
d) Puntos de inflexión.



Gráfica de f'

5) (1,2p) Halla la siguiente integral:

$$\int 9x^2\cdot\ln x\cdot dx$$

6) (1,3p) Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $y=x^2-4$ e $y=-2x^2+8$.

7) (1,2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro a y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma vectorial:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=a \\ a^2x-ay=a \end{array}\right\}$$

8) (1,3p) Dada la matriz A, halla A^n:

$$A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: *Dada la función $f(x)=x\cdot\cos(\pi x/2)+2x$, prueba que existe α en (1,2) tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos que utilices.*
(1,3 PUNTOS)

* * *

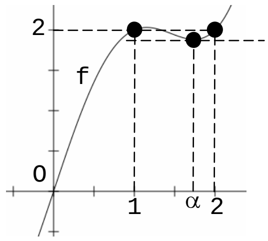
Solución:

Primero[1] derivamos la función f:

$$f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+2 \Rightarrow \text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle,[2] existe α en el intervalo abierto (1,2) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:



1ª) $f(1)=f(2)$:

- $f(1)=\cos(\pi/2)+2=2$
- $f(2)=2\cdot\cos\pi+4=-2+4=2$

2ª) f es continua en [1,2] por ser derivable en R.

3ª) f es derivable en (1,2) por serlo en R.

---

[1] En realidad lo primero que hay que hacer es averiguar si f(1) es o no igual a f(2). Como son iguales, podemos aplicar el teorema de Rolle al intervalo [1,2], que es lo que hacemos en el texto.

[2] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo [3/2,2], por ejemplo.

Ejercicio 2: *Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:*

$$f(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{1-x}}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(1,+∞):

$$\begin{cases}1/(x-1)>0\\ 1-x\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>1\\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow x>1$$

2º) La función no tiene asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{1-x}}=\left(\frac{1}{0^+}\right)^{\frac{1}{0^-}}=(+\infty)^{-\infty}=0$$

3º) La recta y=1 es asíntota horizontal de la función en +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{1-x}} \overset{1}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{x-1}\right)} \overset{2}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-x}\cdot[\ln 1-\ln(x-1)]\right)} \overset{3}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}} \overset{4}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{+\infty-1}} = e^0=1$$

[1] Transformamos la expresión indeterminada 0^0 en la indeterminación $0\cdot\infty$.
[2] Por las propiedades de los logaritmos.
[3] Multiplicamos numerador y denominador por -1.
[4] Como sale la expresión indeterminada ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al numerador la regla del límite de la composición.

Ejercicio 3: *Calcula los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en x=1:*

$$f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & \text{si } x<1 \\ \ln x+2\cos(\pi x) & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si $x\neq 1$, la derivada de f es:

$$f'(x)=\begin{cases} 3ax^2+b & \text{si } x<1 \\ 1/x-2\pi\cdot \text{sen}(\pi x) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si f es continua[1] en x=1, entonces a+b=-2:

- $f(1)=-2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(ax^3+bx)=a+b$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[\ln x+2\cos(\pi x)] \overset{2}{=} -2$

Si f es derivable en x=1, entonces 3a+b=1:

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(3ax^2+b)=3a+b$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[1/x-2\pi\cdot \text{sen}(\pi x)]=1$

Por último, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 3a+b=1 \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases} a+b=-2 \\ 2a=3 \end{cases} \Rightarrow a=3/2 \Rightarrow b=-7/2$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{ax^3+bx+2}{x-1}=\dfrac{a+b+2}{0^-} \overset{4}{\Rightarrow} a+b+2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{ax^3+bx+2}{x-1} \overset{5}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{3ax^2+b}{1}=3a+b$$

- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\ln x+2\cdot\cos(\pi x)+2}{x-1} \overset{6}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1/x-2\pi\cdot \text{sen}(\pi x)}{1}=1$

Por tanto, para que la función sea derivable, 3a+b=1. Llegamos, pues, al mismo sistema que antes.

---

[1] Si f es derivable en x=1, debe ser continua en dicho punto.

[2] Para calcular el límite del segundo sumando hemos aplicado la regla del límite de la composición. Lo mismo sucede en todos los límites que siguen en los que aparecen las expresiones sen(πx) o cos(πx).

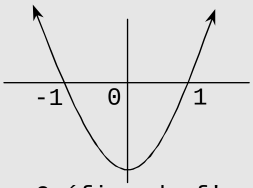
[3] A la segunda ecuación le restamos la primera.

[4] Si $a+b+2\neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=1.

[5] Como a+b+2=0, sale la indeterminación 0/0; por tanto, aplicamos L'Hôpital. También puede sustituirse b por –a-2 y factorizar el numerador por Ruffini.

[6] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 4: *De la función f se pide (la gráfica que está dibujada es la de su derivada):* ***a)*** *intervalos de monotonía;* ***b)*** *extremos relativos;* ***c)*** *intervalos de concavidad y convexidad;* ***d)*** *puntos de inflexión.*



Gráfica de f'

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Aplicamos el criterio de la derivada primera (para el estudio de la monotonía):

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
f' es	+	-	+
f es	creciente	decreciente	creciente

Como la función f es continua en x=-1 y en x=1 (por ser derivable en ambos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, la función tiene un máximo en x=-1 y un mínimo en x=1.

2º) Aplicamos el criterio de la derivada primera (para el estudio de la curvatura y los puntos de inflexión):

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
f' es	decreciente	creciente
f es	cóncava	convexa

Como la función f' tiene un extremo relativo en x=0, f tiene un punto de inflexión en x=0.

Ejercicio 5: *Halla la siguiente integral:*

$$\int 9x^2 \cdot \ln x \cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int 9x^2 \cdot \ln x \cdot dx \overset{1}{=} 3x^3 \cdot \ln x - 3 \cdot \int x^2 \cdot dx \overset{2}{=}$$

$$= 3x^3 \cdot \ln x - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 3x^3 \cdot \ln x - x^3 + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	$9x^2$
-	$\frac{1}{x}$	$9 \cdot \frac{x^3}{3} = 3x^3$

Comprobación:

$$(3x^3 \cdot \ln x - x^3)' = 9x^2 \cdot \ln x + 3x^3 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 = 9x^2 \cdot \ln x + 3x^2 - 3x^2 = 9x^2 \cdot \ln x$$

1 Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

2 Se trata de una integral inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 6: *Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $y=x^2-4$ e $y=-2x^2+8$.* *(1,3 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=-2x^2+8 \end{cases} \Rightarrow x^2-4=-2x^2+8 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

2º) Averiguamos entre -2 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

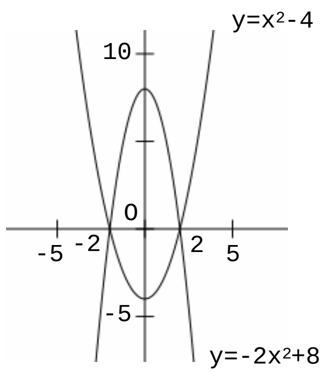
x	y_1	y_2
0	-4	8

3º) Calculamos el área:[1]

$$A=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8-x^2+4)\cdot dx=\int_{-2}^{2}(12-3x^2)\cdot dx \stackrel{2}{=}$$

$$=\left[12x-3\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left[12x-x^3\right]_{-2}^{2}=(24-8)-(-24+8)=16+16=32$$

Representación gráfica:



[1] Si se repara en la simetría respecto del eje OY, puede calcularse la integral entre 0 y 2, multiplicando luego el resultado por 2.

[2] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 7: *Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro a y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma vectorial:*

$$\left.\begin{aligned} ax-y&=a \\ a^2x-ay&=a \end{aligned}\right\}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & a \\ a^2 & -a & a \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{a} & -1 & a \\ 0 & 0 & \mathbf{a-a^2} \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a\cdot(1-a)=0 \Rightarrow a=0,\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[3]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=1+y \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el sistema es incompatible.

---

1 $2^a f - a\cdot 1^a f$.

2 Si $a-a^2\neq 0$, el sistema es incompatible (caso 3º). Estudiamos primero los demás casos.

3 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

Ejercicio 8: *Dada la matriz A, halla A^n:*

$$A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

(1,3 PUNTOS)

** * **

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & -3x \\ 0 & 4x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^2 & -3x \\ 0 & 4x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^3 & -7x^2 \\ 0 & 8x^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^3 & -7x^2 \\ 0 & 8x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^4 & -15x^3 \\ 0 & 16x^4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n=\begin{pmatrix} x^n & (1-2^n)\cdot x^{n-1} \\ 0 & 2^n\cdot x^n \end{pmatrix}$$