1) (1,2p) Dada la función $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x+1)$, prueba que existe α en $(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

2) (1,3p) Calcula las asíntotas de la función del problema anterior.

3) (1,2p) Estudia si la siguiente función es derivable en $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

4) (1,3p) Halla la tangente de inflexión de la función:

$$y=\frac{e}{x}+\ln x^2$$

5) (1,2p) Calcula la siguiente integral:

$$\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\cdot dx$$

6) (1,3p) Halla el área de la región comprendida entre la hipérbola $xy=3$ y la recta $x+y=4$.

7) (1,2p) Calcula los valores de los parámetros a y b para los que el siguiente sistema es compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=1\\ a^2x+by&=2\end{aligned}\right\}$$

8) (1,3p) Dada la matriz A, halla x e y si $A^{-1}=A'$:

$$A=\begin{pmatrix}4/5 & x\\ y & -4/5\end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: *Dada la función $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x+1)$, prueba que existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos que utilices.* *(1,2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Primero[1] derivamos la función f:

$$f'(x)=\ln(x+1)+(x-1)\cdot\frac{1}{x+1} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f) \overset{2}{=} (-1,+\infty)$$

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle,[3] existe α en el intervalo abierto[4] (0,1) tal que $f'(\alpha)=0$.

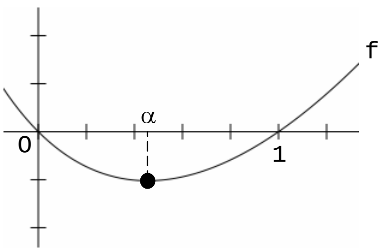
En efecto:

1ª) $f(0)=f(1)$:

- $f(0)=-1\cdot\ln 1=-1\cdot 0=0$
- $f(1)=0\cdot\ln 2=0$

2ª) f es continua en [0,1] por ser derivable en su dominio.

3ª) f es derivable en (0,1) por serlo en su dominio.



[1] En realidad lo primero que hay que hacer es averiguar si f(0) es o no igual a f(2). Como no son iguales, hemos calculado f(1), que coincide con f(0). Por tanto, podemos aplicar el teorema de Rolle al intervalo [0,1], que es lo que hacemos en el texto.

[2] Ya que el argumento del logaritmo es siempre positivo.

[3] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

[4] Si α está en el intervalo (0,1), también está en (0,2).

Ejercicio 2: Calcula las asíntotas de la función del problema anterior.

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(-1,+∞):

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

2º) La recta x=-1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} [(x-1)\cdot\ln(x+1)] \overset{1}{=} -2\cdot\ln 0^{+} = (-2)\cdot(-\infty)=+\infty$$

3º) La función tiene en +∞ una rama parabólica en la dirección del eje OY. Por tanto, no tiene asíntota horizontal ni oblicua:

- $k=\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [(x-1)\cdot\ln(x+1)] \overset{1}{=} (+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
- $m=\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)\cdot\ln(x+1)}{x} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\cdot\ln(x+1)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\ln(x+1)\right] \overset{1}{=} (1-0)\cdot(+\infty)=+\infty$$

1 Para calcular el límite del segundo factor aplicamos la regla del límite de la composición.

2 Como sale la indeterminación ∞/∞ (para obtenerla hemos aplicado en el numerador la regla del límite de la composición), podemos aplicar L'Hôpital. Aunque también puede hacerse cono sigue.

Ejercicio 3: *Estudia si la siguiente función es derivable en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

La función es derivable en x=0 y su derivada es f'(0)=-1/2:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x\cdot(e^x-1)}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x^2}\overset{3}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}\overset{4}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}=\frac{-e^0}{2}=\frac{-1}{2}$$

1 Multiplicamos numerador y denominador por e^x-1.

2 Ya que, en x=0, $e^x-1\sim x$.

3 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

4 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse teniendo en cuenta que en x=0, $e^x-1\sim x$.

Ejercicio 4: *Halla la tangente de inflexión de la función:*

$$y=\frac{e}{x}+\ln x^2$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) La función tiene un punto de inflexión en x=e:

$$y=\frac{e}{x}+\ln x^2 \Rightarrow y'=\frac{-e}{x^2}+\frac{2x}{x^2}=\frac{2x-e}{x^2} \Rightarrow$$

$$y''=\frac{2x^2-2x(2x-e)}{x^4}=\frac{2x-2(2x-e)}{x^3}=\frac{2x-4x+2e}{x^3}=\frac{2e-2x}{x^3}=\frac{2(e-x)}{x^3}$$

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,e)$	$(e,+\infty)$
y" es	-	+	-
y es	cóncava	convexa	cóncava

Ahora bien, como la función y' es continua en x=e (por ser derivable en dicho punto),[1] entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,[2] la función tiene un punto de inflexión en x=e.

2º) Calculamos la ordenada del punto de inflexión:

$$y(e)=1+\ln e^2=1+2\cdot\ln e=1+2\cdot 1=3$$

3º) Calculamos la pendiente de la tangente de inflexión:

$$y'(e)=\frac{2e-e}{e^2}=\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}$$

Resumiendo:

x	y	y'
e	3	1/e

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la tangente de inflexión es:

$$y-3=\frac{1}{e}\cdot(x-e) \Rightarrow y-3=\frac{1}{e}\cdot x-1 \Rightarrow y=\frac{1}{e}\cdot x+2$$

[1] Observa que Dom(y')=Dom(y)=R-{0}.

[2] El estudio de los puntos de inflexión puede hacerse también con el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 5: Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\cdot dx = \int (\operatorname{sen} x)^{-3}\cdot \cos x\cdot dx \overset{1}{=} \frac{(\operatorname{sen} x)^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2\cdot \operatorname{sen}^2 x} + C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2\cdot \operatorname{sen}^2 x}\right)' = -\frac{-4\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos x}{4\cdot \operatorname{sen}^4 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

* * *

También puede hacerse como sigue:[2]

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\cdot dx \overset{3}{=} \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot dx = -\int \operatorname{ctg} x\cdot \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot dx \overset{4}{=} -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C$$

[1] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\cdot dx = dt$.

[2] E incluso por partes.

[3] Dividimos numerador y denominador por $\operatorname{sen} x$.

[4] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\operatorname{ctg} x = t$, $(-1/\operatorname{sen}^2 x)\cdot dx = dt$.

Ejercicio 6: Halla el área de la región del plano comprendida entre la hipérbola x·y=3 y la recta x+y=4. (1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} x\cdot y=3 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3/x \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow 3/x=4-x \Rightarrow 3=4x-x^2 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 1 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

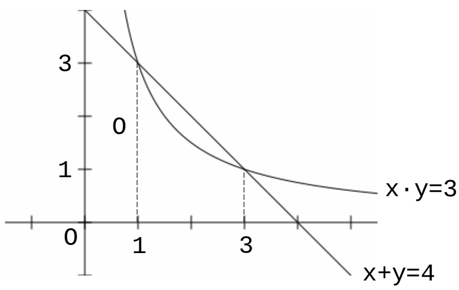
x	y_1	y_2
2	3/2	2

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_1^3\left(4-x-\frac{3}{x}\right)\cdot dx \overset{1}{=} \left[4x-\frac{x^2}{2}-3\cdot\ln|x|\right]_1^3=\left(12-\frac{9}{2}-3\cdot\ln 3\right)-\left(4-\frac{1}{2}-3\cdot\ln 1\right)=$$

$$=12-\frac{9}{2}-3\cdot\ln 3-4+\frac{1}{2}=4-3\cdot\ln 3$$

Representación gráfica:



[1] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 7: *Calcula los valores de los parámetros a y b para los que el siguiente sistema es compatible indeterminado:*

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ a^2x+by=2 \end{cases}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ a^2 & b & | & 2 \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ b & a^2 & | & 2 \end{pmatrix} \end{array} \overset{2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & | & 1 \\ 0 & \mathbf{a^2-2b} & | & 2-b \end{pmatrix} \end{array}$$

Como el sistema tiene dos incógnitas, para que sea compatible indeterminado después de aplicar el método de Gauss debe quedar sólo una ecuación. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} a^2-2b=0 \\ 2-b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=\pm 2}$$

Hay, pues, dos soluciones:

a	b
2	2
-2	2

1 $1^a c \leftrightarrow 2^a c$.
2 $2^a f - b \cdot 1^a f$.

Ejercicio 8: *Dada la matriz A, halla x e y si $A^{-1}=A'$:*

$$A=\begin{pmatrix} 4/5 & x \\ y & -4/5 \end{pmatrix}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A\cdot A^{-1}=I \Rightarrow A\cdot A'=I \Rightarrow \begin{pmatrix} 4/5 & x \\ y & -4/5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4/5 & y \\ x & -4/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 16/25+x^2 & 4y/5-4x/5 \\ 4y/5-4x/5 & y^2+16/25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16/25+x^2=1 \\ 4y/5-4x/5=0 \\ y^2+16/25=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=9/25 \\ x=y \\ y^2=9/25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 3/5 \\ x=y \\ y=\pm 3/5 \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

x	y
3/5	3/5
-3/5	-3/5