1) (1,2p) Calcula:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}}$$

2) (1,3p) Halla m y n para que sea derivable la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & \text{si } x\le 1 \\ -x^2+nx & \text{si } x>1 \end{cases}$$

3) (1,3p) Deriva y simplifica la función:

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

4) (1,2p) Halla:

$$\int \frac{x}{1-x^2}\cdot dx$$

5) (1,2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=a+1 \\ ax+ay+a^2z=3a \\ ax-y+(a-a^2)z=1-5a \end{array}\right\}$$

6) (1,3p) Dadas las matrices A y B, halla $(A\cdot B)^{-1}$ y $(A\cdot B)^n$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) (1,3p) Halla la recta que pasa por el punto P, es paralela al plano π y corta a la recta r:

$$P(0,1,2) \qquad \pi\equiv y-z=0 \qquad r\equiv\begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

8) (1,2p) Calcula la distancia del eje de abscisas a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}} \qquad \text{(1,2 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}} \overset{1}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}} \overset{2}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{\operatorname{sen}x}\cdot(1+\operatorname{sen}x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x\cdot\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x} = e^{-\infty} = 0$$

[1] Ya que el dominio de la función está formado por todos los números positivos x (el argumento del logaritmo debe ser positivo) tales que $\operatorname{sen}x \neq -1$ (la base de las funciones potencial-exponenciales debe ser positiva) y $\operatorname{sen}x \neq 0$.

[2] Ya que sale la expresión indeterminada 1^{∞}.

Ejercicio 2: *Halla m y n para que sea derivable la función:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & \text{si } x\le 1 \\ -x^2+nx & \text{si } x>1 \end{cases}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si $x\neq 1$, la derivada de f es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<1 \\ -2x+n & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si f es continua[1] en x=1, entonces -4+m=-1+n:

- $f(1)=-4+m$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2-5x+m)=-4+m$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(-x^2+nx)=-1+n$

Si f es derivable en x=1, entonces -3=-2+n:

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x-5)=-3$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(-2x+n)=-2+n$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -4+m=-1+n \\ -3=-2+n \end{cases} \Rightarrow n=-1 \Rightarrow m=2$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada en x=1:[2]

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x^2-5x+m+4-m}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}\overset{3}{=}$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{(x-1)(x-4)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-4)=-3$$

- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{-x^2+nx+4-m}{x-1}=\dfrac{-1+n+4-m}{0^+}\overset{4}{\Rightarrow} n-m+3=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{-x^2+nx+4-m}{x-1}\overset{5}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{-2x+n}{1}=-2+n$$

Por tanto, para que la función sea derivable, -2+n=-3. Llegamos, pues, al mismo sistema que antes.

[1] Si f es derivable en x=1, debe ser continua en dicho punto.
[2] Ya hemos visto al comienzo del ejercicio que la función es derivable en los demás puntos.
[3] Factorizamos el numerador.
[4] Si n-m+3≠0, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=1.
[5] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También se puede sustituir m por n+3, factorizar por Ruffini y simplificar.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2}}\cdot\frac{\cos x\cdot(1+\cos x)-\operatorname{sen}x\cdot(-\operatorname{sen}x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)^2+\operatorname{sen}^2x}\cdot\frac{\cos x+\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x}{1+2\cos x+\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}=$$

$$=\frac{1+\cos x}{2+2\cos x}=\frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 4: *Halla:*

$$\int \frac{x}{1-x^2}\cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

Por tanto:[1]

$$\frac{x}{1-x^2}=\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1+x)(1-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=A(1+x)+B(1-x) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=1/2 \\ \text{Si } x=-1 \Rightarrow -1=2B \Rightarrow B=-1/2 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x}{1-x^2}\cdot dx=\int \frac{1/2}{1-x}\cdot dx+\int \frac{-1/2}{1+x}\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot \int \frac{-1}{1-x}\cdot dx-\frac{1}{2}\cdot \int \frac{1}{1+x}\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot \ln|1-x|-\frac{1}{2}\cdot \ln|1+x|+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot \ln|1-x|-\frac{1}{2}\cdot \ln|1+x|\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}=$$

$$=\frac{1+x-1+x}{2(1-x)(1+x)}=\frac{2x}{2(1-x)(1+x)}=\frac{x}{1-x^2}$$

---

[1] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

[2] Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: *Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro a:*

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=a+1 \\ ax+ay+a^2z=3a \\ ax-y+(a-a^2)z=1-5a \end{array}\right\}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & a+1 \\ a & a & a^2 & 3a \\ a & -1 & a-a^2 & 1-5a \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & a^2 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & -6a \end{array}\right) \overset{2}{\to} \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a+1=0 \\ a(1-a)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \\ a=1 \end{array}\right.$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \overset{3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ z=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y \\ z=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-3 \end{array}\right.$$

2º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to -y=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=-1 \\ z=\beta \end{array}\right.$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=a+1 \\ (a+1)y+a^2z=2a-1 \\ a(1-a)z=-6a \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-6a}{a(1-a)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{6}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)y=2a-1-\frac{6a^2}{a-1}=\frac{2a^2-2a-a+1-6a^2}{a-1}=\frac{-4a^2-3a+1}{a-1} \overset{7}{=} \frac{(-4a+1)(a+1)}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-4a+1}{a-1}} \Rightarrow ax=a+1+\frac{-4a+1}{a-1}=\frac{a^2-1-4a+1}{a-1}=\frac{a(a-4)}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-4}{a-1}}$$

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
2 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4º).
3 1ªf·(-1); 3ªf+2·2ªf.
4 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 2.
5 2ªf+1ªf.
6 Ya que la última ecuación es incompatible.
7 Factorizamos el numerador.

Ejercicio 6: *Dadas las matrices A y B, halla $(A\cdot B)^{-1}$ y $(A\cdot B)^n$:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & -1+0+1\\ 3-2+0 & -3+4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Aplicamos el método de Gauss para hallar la inversa de A·B:[1]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow (A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 1-1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos $(A\cdot B)^n$:

$$(A\cdot B)^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(A\cdot B)^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$$

1 También puede hacerse mediante determinantes.
2 2ªf-1ªf.

Ejercicio 7: *Halla la recta que pasa por el punto P, es paralela al plano π y corta a la recta r:*

$$P(0,1,2) \qquad \pi \equiv y-z=0 \qquad r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

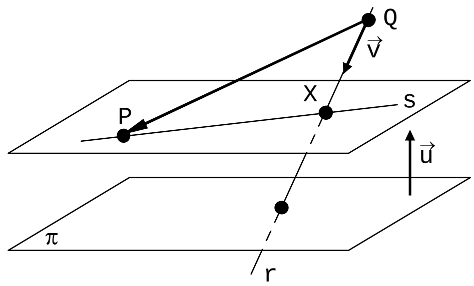
(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si la recta s es paralela al plano π, el vector característico de éste, $\vec{u}=(0,1,-1)$, es perpendicular a la recta s.

Si la recta s pasa por el punto P y corta a la recta r, se encuentra situada en el plano determinado por P y r. Por tanto, también el vector característico de este plano es perpendicular a s.



Ahora bien, una determinación lineal de la recta r es la siguiente:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(1,0,0) \\ \vec{v}=(-1,1,0) \end{cases}$$

En consecuencia, un vector característico del plano determinado por el punto P y la recta r es:

$$\vec{w}=\vec{v}\wedge[\overrightarrow{QP}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}$$

Por tanto, un vector direccional de la recta s es:

$$\vec{u}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}=2(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$$

Como la recta s pasa por el punto P(0,1,2), su ecuación continua es:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

* * *

También puede calcularse s como la intersección del plano que pasa por P y es paralelo a π con el plano que determinan P y r.[1] O hallando el punto X como intersección de la recta r y el plano que pasa por P y es paralelo a π. Este punto también puede calcularse teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{PX}]$ es perpendicular a $\vec{u}$.

[1] Este segundo plano queda determinado, evidentemente, por el punto Q y los vectores $\vec{v}$ y $[\overrightarrow{QP}]$, pero también puede calcularse teniendo en cuenta que es el plano del haz de arista r, $\alpha(x+y-1)+\beta z=0$, que pasa por P.

Ejercicio 8: *Calcula la distancia del eje de abscisas a la recta de ecuación:*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si r es la recta dada, una determinación lineal suya es:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} P(1,-3,2) \\ \vec{u}=(2,-1,1) \end{cases}$$

Como el eje OX pasa por O(0,0,0) y tiene a $\vec{i}(1,0,0)$ por vector direccional, las rectas no son paralelas, ya que sus vectores direccionales no son colineales.

Por tanto:

$$d(r,OX)=\frac{|[[\overrightarrow{OP}],\vec{u},\vec{i}]|}{|\vec{u}\wedge\vec{i}|}=\frac{\left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|}=\frac{|-3+2|}{|\vec{j}+\vec{k}|}=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$