1) Calcula los límites de la siguiente función en 0 y $+\infty$:

$$f(x)=\frac{3x+\operatorname{sen} x}{x}$$

2) Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en x=0:

$$f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

3) Deriva y simplifica:

$$y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

4) Calcula el área de la región del plano limitada por la curva $y=\ln x$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=e.

5) Discute según los valores del parámetro y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ ax-z=0 \\ ax-az=-a+1 \end{array}\right\}$$

6) Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix}$$

7) Dadas las rectas r y r', halla la ecuación continua de la que las corta perpendicularmente:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z+3}{-1} \qquad r'\equiv\begin{cases} x+y+5z-21=0 \\ x-y-z-3=0 \end{cases}$$

8) Dados los puntos A(-1,2,-9), B(2,-3,-4) y C(1,3,-12), prueba que son los vértices de un triángulo y halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: *Calcula los límites de la siguiente función en 0 y $+\infty$:*

$$f(x)=\frac{3x+\operatorname{sen}x}{x}$$

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\operatorname{sen}x}{x} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\left(3+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right) \overset{2}{=} \lim_{x\to 0}3+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} \overset{3}{=} 3+1=4$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x+\operatorname{sen}x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(3+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right) \overset{2}{=} \lim_{x\to +\infty}3+\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}x\right)=3+0=3$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $-1\le\operatorname{sen}x\le 1$

[1] La forma más sencilla de hacer este límite es por L'Hôpital, aunque también puede hacerse como sigue.

[2] Por las propiedades de los límites.

[3] Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen}x\sim x$.

Ejercicio 2: *Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en x=0:*

$$f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

* * *

Solución:

Como $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, no tiene sentido preguntar por la derivabilidad de f en x=0.

La función f tiene en x=0 una discontinuidad de salto finito:

- f(0) no existe
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}=\frac{e^{1/0^-}}{1+e^{1/0^-}}=\frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}=\frac{0}{1+0}=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}\overset{1}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}}{e^{1/x}\cdot\left(\frac{1}{e^{1/x}}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\frac{1}{e^{1/x}}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^{1/0^+}}+1}=$

$$=\frac{1}{\frac{1}{e^{+\infty}}+1}=\frac{1}{\frac{1}{+\infty}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

[1] Como sale la indeterminación ∞/∞, podemos aplicar L'Hôpital (es la forma más sencilla de hacer este límite). También puede hacerse como sigue.

Ejercicio 3: *Deriva y simplifica:*

$$y=arc\ tg\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

* * *

Solución:

$$y'=\frac{1}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)'=\frac{1+\cos x}{1+\cos x+1-\cos x}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{1+\cos x}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x)+\operatorname{sen} x\cdot(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x+1-\cos x)}{1+\cos x}=\frac{1}{4\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{2\cdot\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\overset{1}{=}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\cdot(1+\cos x)^2}}=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cdot|\operatorname{sen} x|}$$

[1] Ya que $1+\cos x>0$.

Ejercicio 4: *Calcula el área de la región del plano limitada por la curva $y=\ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=e$.*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\ln x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1$$

2º) Averiguamos entre 1 y e qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
2	$\ln 2$	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_1^e [\ln x - 0]\cdot dx = \int_1^e \ln x \cdot dx \overset{1}{=} [x\cdot \ln x - x]_1^e =$$

$$=(e\cdot \ln e - e)-(1\cdot \ln 1 - 1)=(e-e)-(0-1)=0+1=1$$

* * *

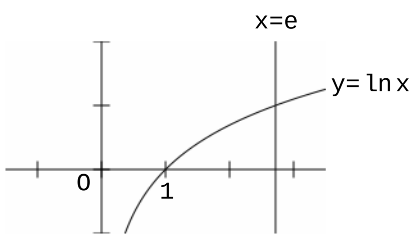
$$\int \ln x \cdot dx \overset{2}{=} x\cdot \ln x - \int 1\cdot dx \overset{3}{=} x\cdot \ln x - x + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	1
-	$1/x$	x

Comprobación:

$$[x\cdot \ln x - x]' = \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Representación gráfica:



1 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
2 Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.
3 Esta integral es inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 5: *Discute según los valores del parámetro y resuelve, en su caso, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ ax-z=0 \\ ax-az=-a+1 \end{array}\right\}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -a & -a+1 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ 0 & -a & -a & 1-a \\ 0 & -a & 1-2a & 2-2a \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ 0 & -a & -a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a=0 \\ 1-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ -ay-az=1-a \\ (1-a)z=1-a \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{1-a}{1-a} \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow -ay=1-a+az=1-a+a=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{a}} \Rightarrow ax=a-1-ay-(a-1)z=a-1+1-a+1=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
2 3ªf-2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
4 Ya que la segunda ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: *Calcula el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix}$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 4x+1 & x & x & x \\ 4x+1 & x+1 & x & x \\ 4x+1 & x & x+1 & x \\ 4x+1 & x & x & x+1 \end{vmatrix} \overset{2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 4x+1 & x & x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{3}{=} 4x+1$$

---

1 1ªc+2ªc+3ªc+4ªc.

2 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.

3 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 7: *Dadas las rectas r y r', halla la ecuación continua de la que las corta perpendicularmente:*

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z+3}{-1} \qquad r' \equiv \begin{cases} x+y+5z-21=0 \\ x-y-z-3=0 \end{cases}$$

* * *

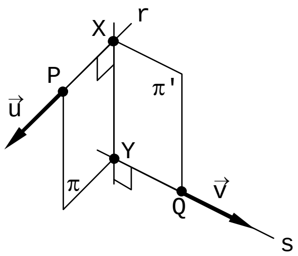
Solución:

Hallamos las ecuaciones paramétricas y una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z+3}{-1}=\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=8-2\alpha \\ z=-3-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1,8,-3) \\ \vec{u}(1,-2,-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5z=21 \\ x-y-z=3 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} 2y+6z=18 \\ x-y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=9-3z \\ x=3+9-3z+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12-2\beta \\ y=9-3\beta \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(12,9,0) \\ \vec{v}(-2,-3,1) \end{cases}$$

Sean X e Y los puntos en los que la recta buscada corta a r y s, respectivamente:[2]



Por estar el punto X en la recta r: $X(1+\alpha,8-2\alpha,-3-\alpha)$.

Por estar el punto Y en s: $Y(12-2\beta,9-3\beta,\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(11-2\beta-\alpha,1-3\beta+2\alpha,3+\beta+\alpha)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular[3] a $\vec{u}(1,-2,-1)$ y a $\vec{v}(-2,-3,1)$:

$$\begin{cases} [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0 \\ [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11-2\beta-\alpha-2+6\beta-4\alpha-3-\beta-\alpha=0 \\ -22+4\beta+2\alpha-3+9\beta-6\alpha+3+\beta+\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\beta-6\alpha=-6 \\ 14\beta-3\alpha=22 \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -25\beta=-50 \\ 14\beta-3\alpha=22 \end{cases} \Rightarrow \beta=2 \Rightarrow 28-3\alpha=22 \Rightarrow 3\alpha=6 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(3,4,-5) \\ Y(8,3,2) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{XY}]=(5,-1,7) \Rightarrow XY\equiv\frac{x-3}{5}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+5}{7}$$

---

[1] A la primera ecuación le resto la segunda.

[2] Como $\vec{u}\wedge\vec{v}$ es un vector direccional de la recta XY, ya que ésta es perpendicular a r y a s, otro modo de hallar su ecuación consiste en calcular uno de sus puntos, por ejemplo Y. Este punto se puede obtener por intersección de la recta s y el plano π, plano determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}\wedge\vec{v}$. También puede obtenerse XY como intersección de π y π'.

[3] Si en la resolución del sistema que sigue resulta que los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s.

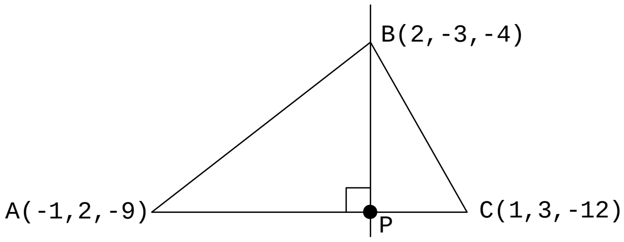
[4] A la primera ecuación le resto dos veces la segunda.

Ejercicio 8: *Dados los puntos A(-1,2,-9), B(2,-3,-4) y C(1,3,-12), prueba que son los vértices de un triángulo y halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.*

* * *

Solución:

Sea P la proyección de B sobre AC:



Como los vectores $[\overrightarrow{AB}]=(3,-5,5)$ y $[\overrightarrow{AC}]=(2,1,-3)$ no son colineales, los puntos A, B y C no están alineados. Por tanto, forman triángulo:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \neq \frac{5}{-3}$$

Por otro lado, la longitud del segmento BP coincide con la distancia del punto B a la recta AC:

$$d(B,P)=d(B,AC)=\frac{\left|[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]\right|}{\left|[\overrightarrow{AC}]\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{|10\vec{i}+19\vec{j}+13\vec{k}|}{\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{\sqrt{100+361+169}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{630}}{\sqrt{14}}=\sqrt{45}=3\cdot\sqrt{5}$$