23 de mayo de 2005.[1]

1) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \operatorname{sen}(1/x)}{x}$$

2) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

3) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función en el punto de abscisa $\pi/2$:

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

4) Calcula las integrales:

$$\int \operatorname{ctg}x\cdot dx \qquad\qquad \int\frac{dx}{x\cdot \ln x}$$

5) Discute según los valores del parámetro y resuelve cuando sea posible el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax+ay+(a-1)z=a-1\\ ax-z=0\\ ax-az=-a+1\end{array}\right\}$$

6) Dada la matriz A, ¿para qué valores de a tiene inversa? Calcula su inversa para a=2:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

7) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r:

$$P(0,-2,1) \qquad\qquad r\equiv\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z}{2}$$

8) Las rectas r y r' son coplanarias. Halla k y el ángulo que forma dicho plano con el plano coordenado OXY:

$$r\equiv\frac{x}{-1}=\frac{y-k}{4}=\frac{z-4}{3} \qquad\qquad r'\equiv\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{1}$$

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: *Calcula los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sen(1/x)}{x}$$

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x} \overset{1}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot(x+e^{2x}-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{x}} \overset{2}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)} \overset{3}{=} e^{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}} \overset{4}{=} e^{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = e^{1+\lim\limits_{x\to 0}2} = e^3$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sen(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot sen\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$
- $-1 \le sen(1/x) \le 1$

[1] Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞.

[2] Como sale la indeterminación 0/0, podemos aplicar L'Hôpital (es la forma más sencilla de hacer este límite). También puede hacerse como sigue.

[3] Ya que el límite de una suma es la suma de los límites.

[4] Ya que $e^f-1\sim f$ si f es un infinitésimo.

Ejercicio 2: *Estudia la continuidad de la siguiente función:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$$

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=R.

2º) La función es continua en R-{0}, ya que, si a≠0:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} = \frac{1+e^{1/a}}{1-e^{1/a}} \overset{1}{=} f(a)$$

3º) La función tiene en x=0 una discontinuidad de salto finito (aunque es continua por la izquierda en dicho punto):

- f(0)=1
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}=\dfrac{1+e^{1/0^-}}{1-e^{1/0^-}}=\dfrac{1+e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} \overset{2}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{1/x}\cdot\left(\dfrac{1}{e^{1/x}}+1\right)}{e^{1/x}\cdot\left(\dfrac{1}{e^{1/x}}-1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\dfrac{1}{e^{1/x}}+1}{\dfrac{1}{e^{1/x}}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{e^{1/0^+}}+1}{\dfrac{1}{e^{1/0^+}}-1}=$

$$=\frac{\dfrac{1}{e^{+\infty}}+1}{\dfrac{1}{e^{+\infty}}-1}=\frac{\dfrac{1}{+\infty}+1}{\dfrac{1}{+\infty}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

---

1 Observa que $1-e^{1/a}\neq 0$.

2 Como sale la indeterminación ∞/∞, podemos aplicar L'Hôpital (es la forma más sencilla de hacer este límite). También puede hacerse como sigue.

Ejercicio 3: *Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función en el punto de abscisa $\pi/4$:*

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(\pi/4)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2}}\cdot\frac{\cos x(1+\cos x)+\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2+\operatorname{sen}^2x}=\frac{1+\cos x}{1+2\cos x+\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}=\frac{1+\cos x}{2+2\cos x}=\frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(\pi/4)=\frac{1}{2}$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi/4$	$\pi/8$	$1/2$

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow y-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{\pi}{8}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x$$

Ejercicio 4: Calcula las integrales:

$$\int ctg\, x \cdot dx \qquad\qquad \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

* * *

Solución:

a)

$$\int ctg\, x \cdot dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot dx \overset{1}{=} \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Comprobación:

$$(\ln|\operatorname{sen} x|)' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = ctg\, x$$

b)

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \overset{2}{=} \int \frac{1/x}{\ln x} \cdot dx \overset{3}{=} \ln|\ln x| + C$$

Comprobación:

$$(\ln|\ln x|)' = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

---

[1] La integral es casi inmediata de tipo logaritmo. También puede hacerse con el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x \cdot dx = dt$.
[2] Dividimos numerador y denominador por x.
[3] La integral es casi inmediata de tipo logaritmo. También puede hacerse con el cambio de variable $\ln x = t$, $(1/x) \cdot dx = dt$.

Ejercicio 5: *Discute según los valores del parámetro y resuelve cuando sea posible el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ ax-z=0 \\ ax-az=-a+1 \end{array}\right\}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -a & -a+1 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ 0 & -a & -a & 1-a \\ 0 & -a & 1-2a & 2-2a \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ 0 & -a & -a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a=0 \\ 1-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ -ay-az=1-a \\ (1-a)z=1-a \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{1-a}{1-a} \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow -ay=1-a+az=1-a+a=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{a}} \Rightarrow ax=a-1-ay-(a-1)z=a-1+1-a+1=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a}}$$

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
2 3ªf-2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
4 Ya que la segunda ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A, ¿para qué valores de a tiene inversa? Calcula su inversa para a=2:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

a) La matriz A es inversible si $a\neq\pm1$:

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1-a^2+a-a^2+1-a=2-2a^2=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm1$$

b) Si a=2:[1]

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2-8=-6$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-6;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{2} A^*=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -6 & -3 & 3\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{3}(A^*)'=\begin{pmatrix}2 & -6 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -6 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}}{-6}=\begin{pmatrix}-1/3 & 1 & 1/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/3 & -1/2 & 1/6\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3 & 1 & 1/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/3 & -1/2 & 1/6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1/3+0+4/3 & 1+1-2 & 1/3-1+2/3\\ -1/3+0+1/3 & 1+1/2-1/2 & 1/3-1/2+1/6\\ -1/3+0+1/3 & 1-1/2-1/2 & 1/3+1/2+1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

[1] También se puede calcular la inversa por el método de Gauss.
[2] Escribimos la adjunta de A.
[3] Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 7: *Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r:*

$$P(0,-2,1) \qquad r\equiv\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z}{2}$$

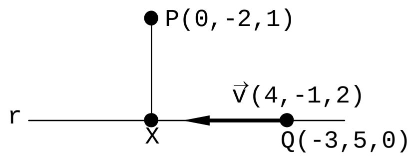
* * *

Solución:

Calculamos las ecuaciones paramétricas y una determinación lineal de la recta r:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z}{2}=\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=-3+4\alpha \\ y=5-\alpha \\ z=2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(-3,5,0) \\ \vec{v}(4,-1,2) \end{cases}$$

Sea X la proyección del punto P sobre la recta r. Como $X\in r$, satisface su ecuación, esto es, $X(-3+4\alpha,5-\alpha,2\alpha)$:



Como las rectas PX y r son perpendiculares, sus vectores direccionales, $[\overrightarrow{PX}]=(-3+4\alpha,7-\alpha,2\alpha-1)$ y $\vec{v}=(4,-1,2)$, también. Por tanto:

$$[\overrightarrow{PX}]\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (-3+4\alpha,7-\alpha,2\alpha-1)\cdot(4,-1,2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12+16\alpha-7+\alpha+4\alpha-2=0 \Rightarrow 21\alpha=21 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{PX}]=(1,6,1) \Rightarrow PX\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{1}$$

* * *

También puede calcularse el parámetro α teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano que pasa por P y es perpendicular a r (cuyo vector característico es $\vec{v}$). O que X es el punto de la recta r más próximo a P. O aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PQX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña Q).[1] Otra forma de obtener la recta PX es como intersección del plano determinado por el punto P y la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por P. O calculando directamente un vector direccional: el producto vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{v}\wedge[\overrightarrow{QP}]$, ya que ambos son perpendiculares a la recta PX. O hallando el punto X(x,y,z) utilizando el hecho de que el vector $[\overrightarrow{QX}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{QP}]$ sobre $\vec{v}$.

[1] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo PQX, siempre sale como una de las soluciones el punto Q de la recta r, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por Q, se obtiene $PQ^2+QQ^2=PQ^2$, esto es, $PQ^2=PQ^2$, lo que siempre es cierto.

Ejercicio 8: Las rectas r y r' son coplanarias. Halla k y el ángulo que forma dicho plano con el plano coordenado OXY:

$$r\equiv\frac{x}{-1}=\frac{y-k}{4}=\frac{z-4}{3} \qquad r'\equiv\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{1}$$

* * *

Solución:

a) Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-k}{4}=\frac{z-4}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(0,k,4) \\ \vec{u}=(-1,4,3) \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{1} \Rightarrow \begin{cases} Q(3,5,3) \\ \vec{v}=(1,2,1) \end{cases}$$

Como las rectas son coplanarias, los vectores $[\overrightarrow{PQ}]$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ también. Por tanto, su producto mixto es cero:

$$[[\overrightarrow{PQ}],\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix} 3 & 5-k & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=12+2+15-3k+4-18+5-k=20-4k=0 \Rightarrow k=5$$

b) Un vector característico del plano OXY es $\vec{k}$ y un vector característico del plano π que determinan las rectas r y s es el producto vectorial de sus vectores direccionales:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$$

Por tanto:

$$\cos(OXY,\pi)=|\cos(\vec{k},\vec{w})|=\frac{|\vec{k}\cdot\vec{w}|}{|\vec{k}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{|(0,0,1)\cdot(-2,4,-6)|}{1\cdot\sqrt{4+16+36}}=$$

$$=\frac{|-6|}{\sqrt{56}}=\frac{6}{2\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow (OXY,\pi)=36^{o}41'57''$$