1) (1p) Estudia las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}$$

2) (1p) Dada la siguiente función, se pide:

a) La derivada simplificada.

b) La ecuación de la tangente de inflexión:

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$$

3) (1p) Halla las asíntotas de la siguiente función, estudia su posición relativa y expresa ésta gráficamente:

$$f(x)=\frac{\ln^2(x+1)}{x+1}$$

4) (1p) Encuentra el punto de la parábola $y=x^2$ que está más próximo al punto $P(-18,0)$.

5) (1p) Halla el área de la región del plano limitada por la curva de ecuación $y=\ln x$, la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa 1 y la recta $x=3$.

6) (1p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} kx+y+z=k^2 \\ kx+(1-k)y+(k-1)z=k^2 \\ kx+y+kz=2k^2 \end{array}\right\}$$

7) (1p) Halla el vector unitario $\vec{u}(a,b,c)$ si se sabe que los rangos de las matrices A y B son simultáneamente 2:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

8) (1p) Resuelve la siguiente ecuación, indicando el grado de multiplicidad de sus raíces:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix}=0$$

9) (1p) Halla la distancia entre las rectas $r\equiv x=3+\alpha,\ y=1,\ z=1-\alpha$ y $s\equiv y=0,\ x-2y+z=0$.

10) (1p) Calcula la ecuación continua de la recta que está en el plano π y corta perpendicularmente a la recta r:

$$\pi\equiv x-2y+3z=1 \qquad r\equiv\frac{x-5}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

Ejercicio 1: *Estudia las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in$Dom(f):[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}=\frac{e^{2/a}-1}{e^{2/a}+1}=f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto finito en x=0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}=\frac{e^{2/0^-}-1}{e^{2/0^-}+1}=\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}\overset{2}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2/x}\cdot(2/x)'}{e^{2/x}\cdot(2/x)'}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1$$

* * *

Como se indica en la nota 2, el límite lateral derecho de la función f en x=0 resulta ser, al dar el paso al límite, la indeterminación ∞/∞:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1}=\frac{e^{2/0^+}-1}{e^{2/0^+}+1}=\frac{e^{+\infty}-1}{e^{+\infty}+1}=\frac{+\infty-1}{+\infty+1}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando $e^{2/x}$ factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 2: *Dada la siguiente función, se pide:* ***a)*** *la derivada simplificada;* ***b)*** *la ecuación de la tangente de inflexión:*

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Primero derivamos la función:

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=$$

$$=\frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{2}{2(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

2º) La condición necesaria de punto de inflexión es que la derivada segunda se anule:

$$y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0\ \Rightarrow\ x=0$$

Para confirmar que se trata de un punto de inflexión aplicamos el criterio de la derivada tercera:[1]

$$y'''=\frac{-2(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y'''(0)=-2\neq 0$$

Por tanto, la función tiene un punto de inflexión en $x=0$.

3º) Calculamos la ordenada del punto de inflexión:

$$y(0)=\operatorname{arc\,tg}1=\pi/4$$

4º) Calculamos la pendiente en el punto de inflexión:

$$y'(0)=1$$

Resumiendo:

x	y	y'
0	$\pi/4$	1

5º) Por tanto, la ecuación explícita de la tangente de inflexión es:

$$y-\frac{\pi}{4}=1\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ y-\frac{\pi}{4}=x\ \Rightarrow\ y=x+\frac{\pi}{4}$$

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada segunda, que es lo más cómodo en este caso.

Ejercicio 3: *Halla las asíntotas de la siguiente función, estudia su posición relativa y expresa ésta gráficamente:*

$$f(x)=\frac{\ln^2(x+1)}{x+1}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(-1,+∞):

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow x>-1$$

2º) La recta x=-1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} \overset{1}{=} \frac{\ln^2(0^+)}{0^+} = \frac{(-\infty)^2}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

3º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\cdot\ln(x+1)}{x+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\ln(x+1)}{x+1} \overset{2}{=}$$

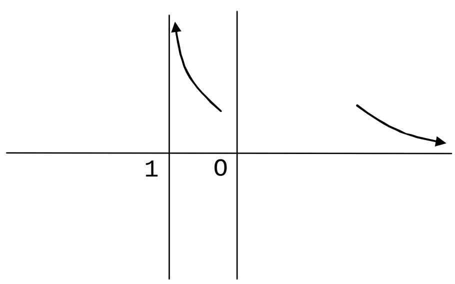
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{+\infty+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{\ln^2(x+1)}{x+1}-0=\frac{\ln^2(x+1)}{x+1}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en +∞, ya que numerador y denominador son positivos, la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

4º) Expresamos gráficamente la posición relativa de la gráfica de la función respecto a sus asíntotas:



---

1 Para calcular el límite del numerador aplicamos la regla del límite de la composición.

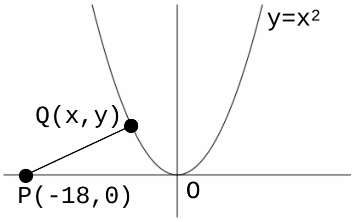
2 Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para obtener esta indeterminación hemos tenido que aplicar al numerador la regla del límite de la composición.

Ejercicio 4: Encuentra el punto de la parábola $y=x^2$ que está más próximo al punto P(-18,0). (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sea Q(x,y) un punto cualquiera de la parábola:



La distancia de P a Q tiene que ser mínima:

$$d=d(P,Q)=\sqrt{(x+18)^2+y^2}$$

Tenemos que expresar la distancia en función de una sola variable. Ahora bien, como Q está en la parábola, satisface su ecuación:

$$x^2=y \Rightarrow d=\sqrt{(x+18)^2+x^4}$$

Como d>0, podemos sustituirla por su cuadrado:

$$C=(x+18)^2+x^4$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=2(x+18)+4x^3=4x^3+2x+36=2(2x^3+x+18) \overset{1}{=} 2(x+2)(2x^2-4x+9)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 2x^2-4x+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-72}}{4} \end{cases} \Rightarrow x=-2$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[2] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en x=-2:

$$C''=12x^2+2 \Rightarrow C''(-2)=48+2=50>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } x=-2$$

Por último:

$$x=-2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow Q(-2,4)$$

1 Descomponemos el polinomio por Ruffini.
2 También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 5: *Halla el área de la región del plano limitada por la curva de ecuación $y=\ln x$, la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa 1 y la recta $x=3$.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Calculamos primero la recta normal a la curva en x=1:

$$y=\ln x \Rightarrow \begin{cases} y(1)=\ln 1=0 \\ y'=1/x \Rightarrow y'(1)=1 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} y-0=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+1$$

* * *

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=\ln x \end{cases} \Rightarrow -x+1=\ln x \overset{2}{\Rightarrow} x=1$$

2º) Averiguamos entre 1 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
2	-1	ln 2

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_1^3 [\ln x-(-x+1)]\cdot dx=\int_1^3 (\ln x+x-1)\cdot dx \overset{3}{=} \left[x\cdot \ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^3=$$

$$=\left(3\cdot \ln 3+\frac{9}{2}-6\right)-\left(\ln 1+\frac{1}{2}-2\right)=3\cdot \ln 3+\frac{9}{2}-6-\frac{1}{2}+2=3\cdot \ln 3=\ln 27$$

* * *

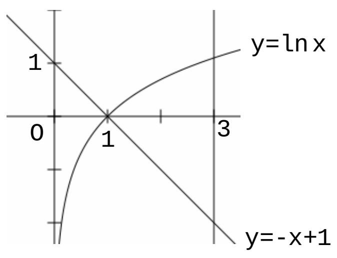
$$\int(\ln x+x-1)\cdot dx=\int \ln x\cdot dx+\frac{x^2}{2}-x \overset{4}{=} x\cdot \ln x-x+\frac{x^2}{2}-x+C=x\cdot \ln x+\frac{x^2}{2}-2x+C$$

S	D	I
+	ln x	1
-	1/x	x

Comprobación:

$$\left(x\cdot \ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2x}{2}-2=\ln x+1+x-2=\ln x+x-1$$

Representación gráfica



1 Si la pendiente de la tangente es m'=1, la de la normal es m=-1 (ya que m·m'=-1).
2 Ya que la recta es la normal a la curva en el punto de abscisa 1.
3 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
4 La integral que falta (las otras son inmediatas de tipo potencial) se hace por partes.

Ejercicio 6: Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} kx+y+z&=k^2\\ kx+(1-k)y+(k-1)z&=k^2\\ kx+y+kz&=2k^2\end{aligned}\right\}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k^2\\ k & 1-k & k-1 & k^2\\ k & 1 & k & 2k^2\end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k^2\\ 0 & -k & k-2 & 0\\ 0 & 0 & k-1 & k^2\end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} k=0\\ -k=0\\ k-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0\\ k=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[3]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} y+z=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

2º) Si k=1, el sistema es incompatible:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} kx+y+z&=k^2\\ -ky+(k-2)z&=0\\ (k-1)z&=k^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{k^2}{k-1}} \Rightarrow ky=(k-2)z=(k-2)\cdot\frac{k^2}{k-1} \Rightarrow \boxed{y=\frac{k(k-2)}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kx=k^2-y-z=k^2-\frac{k(k-2)}{k-1}-\frac{k^2}{k-1}=\frac{k^3-k^2-k^2+2k-k^2}{k-1}=$$

$$=\frac{k^3-3k^2+2k}{k-1} \overset{7}{=} \frac{k(k-1)(k-2)}{k-1}=k(k-2) \Rightarrow \boxed{x=k-2}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
2 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
3 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.
4 2ªf·(-1/2).
5 3ªf+2ªf.
6 Ya que la última ecuación es incompatible.
7 Factorizamos el numerador.

Ejercicio 7: *Halla el vector unitario $\vec{u}(a,b,c)$ si se sabe que los rangos de las matrices A y B son simultáneamente 2:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 0 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 3 & 1 & c\end{pmatrix}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

El rango de la matriz A es 2:

$$rg(A)=rg\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 0 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix} \overset{1}{=} rg\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & -1 & b-a\\ 0 & 0 & c-a\end{pmatrix}=2 \Rightarrow c-a=0 \Rightarrow a=c$$

El rango de la matriz B es 2:

$$rg(B)=rg\begin{pmatrix}2 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 3 & 1 & c\end{pmatrix} \overset{2}{=} rg\begin{pmatrix}2 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 6 & 2 & 2c\end{pmatrix} \overset{3}{=} rg\begin{pmatrix}2 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 2 & -3a+2c\end{pmatrix} \overset{4}{=}$$

$$=rg\begin{pmatrix}2 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 0 & -3a+2b+2c\end{pmatrix}=2 \Rightarrow -3a+2b+2c=0 \overset{5}{\Rightarrow} -3c+2b+2c=0 \Rightarrow c=2b$$

Por último, el vector $\vec{u}$ es unitario:

$$|\vec{u}|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}=1 \overset{5}{\Rightarrow} b^2+2c^2=1 \overset{6}{\Rightarrow} b^2+8b^2=1 \Rightarrow 9b^2=1 \Rightarrow b^2=1/9 \Rightarrow b=\pm 1/3$$

Por tanto, hay dos soluciones:

a	b	c	$\vec{u}$
2/3	1/3	2/3	(2/3,1/3,2/3)
-2/3	-1/3	-2/3	(-2/3,-1/3,-2/3)

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
2 3ªf·2.
3 3ªf-3·1ªf.
4 3ªf+2·2ªf.
5 Ya que a=c.
6 Ya que c=2b.

Ejercicio 8: *Resuelve la siguiente ecuación, indicando el grado de multiplicidad de sus raíces:*

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \overset{1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \overset{3}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (3x-1)(-1-x)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ -1-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/3 \text{ raíz simple} \\ x=-1 \text{ raíz triple} \end{cases}$$

---

1 1ªc+2ªc+3ªc+4ªc.

2 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.

3 Ya que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 9: *Halla la distancia entre las rectas $r\equiv x=3+\alpha,\ y=1,\ z=1-\alpha$ y $s\equiv y=0,\ x-2y+z=0$.*

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x=3+\alpha\\ y=1\\ z=1-\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(3,1,1)\\ \vec{u}=(1,0,-1)\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}y=0\\ x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\beta\\ y=0\\ z=\beta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Q(0,0,0)\\ \vec{v}=(-1,0,1)\end{cases}$$

Como $[\overrightarrow{QP}]=(3,1,1)$ y las rectas son, evidentemente, paralelas:[1]

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|[\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&1\\-1&0&1\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1+0+1}}=\frac{|\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1+16+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=3$$

[1] Ya que sus vectores direccionales son opuestos.

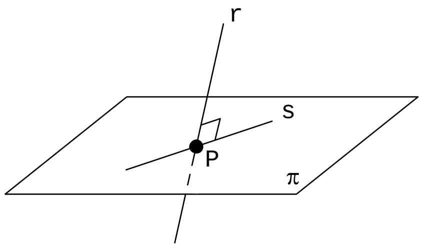
Ejercicio 10: *Calcula la ecuación continua de la recta que está en el plano π y corta perpendicularmente a la recta r:*

$$\pi \equiv x-2y+3z=1 \qquad r\equiv \frac{x-5}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sea s la recta buscada y P el punto de corte con r:



Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}=\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1+2\alpha \\ z=-3-\alpha \end{cases}$$

Como P pertenece a r, $P(5,1+2\alpha,-3-\alpha)$. Y como pertenece a π:

$$5-2(1+2\alpha)+3(-3-\alpha)=1 \Rightarrow 5-2-4\alpha-9-3\alpha=1 \Rightarrow 7\alpha=-7 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow P(5,-1,-2)$$

Como el vector direccional de la recta r, $\vec{u}=(0,2,-1)$, y el vector característico del plano, $\vec{v}=(1,-2,3)$, son perpendiculares a la recta s, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta s es:

$$s\equiv\frac{x-5}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$$

* * *

También puede hacerse de la siguiente manera. Una vez calculado P como intersección de la recta r y el plano π, como la recta s es perpendicular a r, estará en el plano perpendicular a r que pasa por P, y como también está en el plano π, su ecuación viene dada como la intersección de ambos planos; o teniendo en cuenta que los puntos de la recta s son los puntos X del plano[1] tales que el producto escalar de los vectores $[\overrightarrow{PX}]$ y $\vec{u}$ es cero.

---

[1] Por tanto, $X(1+2\alpha-3\beta,\alpha,\beta)$.