1) (1p) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot e^{1/x})$$

2) (1p) Halla las ecuaciones de las asíntotas y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$$

3) (1p) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función en el punto de abscisa π:

$$y=\operatorname{sen}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

4) (1p) Determina los valores de los parámetros a y b si se sabe que la recta tangente a la gráfica de la función $y=2x^3+12x^2+ax+b$ en su punto de inflexión es $y=2x+3$.

5) (1p) Calcula una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

6) (1p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ my-z=m \\ mx+2z=0 \end{array}\right\}$$

7) (1p) Dadas las matrices A y B, halla X si $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8) (1p) Prueba la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(x+1)^3$$

9) (1p) Dados los puntos A(1,-1,2), B(-2,0,3) y C(2,0,-1), halla la ecuación continua de la altura del triángulo ABC relativa al vértice A.

10) (1p) Dadas las rectas r y s, halla la ecuación del plano que determinan y el ángulo que dicho plano forma con el eje de abscisas:

$$r\equiv\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad s\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{0}$$

Ejercicio 1: *Calcula el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot e^{1/x})$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Este límite no existe:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x\cdot e^{1/x})=0\cdot e^{1/0^-}=0\cdot e^{-\infty}=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\cdot e^{1/x})\overset{1}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}}{1/x}\overset{2}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}\cdot(1/x)'}{(1/x)'}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{1/x}=e^{1/0^+}=e^{+\infty}=+\infty$$

1 Transformamos la indeterminación $0\cdot\infty$ en la indeterminación ∞/∞.

2 Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: *Halla las ecuaciones de las asíntotas y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(0,1)∪(1,+∞):

$$\begin{cases} x>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

2º) La recta x=0 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x-1}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en x=1:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1}=1$$

4º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en +∞:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \overset{2}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1}=\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{\ln x}{x-1}-0=\frac{\ln x}{x-1}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en +∞, ya que numerador y denominador son positivos, la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

---

1 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
2 Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 3: *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función en el punto de abscisa π:*

$$y=\operatorname{sen}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(\pi)=\operatorname{sen}\frac{\operatorname{sen}\pi}{\pi}=\operatorname{sen}0=0$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$y'=\cos\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)'=\cos\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{\cos x\cdot x-\operatorname{sen}x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cdot\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}\cdot\cos\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(\pi)=\frac{\pi\cdot\cos\pi-\operatorname{sen}\pi}{\pi^2}\cdot\cos\frac{\operatorname{sen}\pi}{\pi}=\frac{\pi\cdot(-1)-0}{\pi^2}\cdot\cos 0=-1/\pi$$

Resumiendo:

x	y	y'
π	0	$-1/\pi$

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-0=-\frac{1}{\pi}\cdot(x-\pi)\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{\pi}\cdot x+1$$

Ejercicio 4: *Determina los valores de los parámetros a y b si se sabe que la recta tangente a la gráfica de la función $y=2x^3+12x^2+ax+b$ en su punto de inflexión es $y=2x+3$.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

La condición necesaria de punto de inflexión es que la derivada segunda valga cero:

$$y=2x^3+12x^2+ax+b \Rightarrow y'=6x^2+24x+a \Rightarrow y''=12x+24=12(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$$

Por el criterio de la derivada tercera, x=-2 es punto de inflexión:

$$y'''=12 \Rightarrow y'''(-2)=12\neq 0$$

Como y=2x+3 es la recta tangente en dicho punto, podemos calcular la ordenada de éste:

$$y(-2)=2\cdot(-2)+3=-1$$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la recta tangente es 2, podemos hacer el siguiente resumen:

x	y	y'
-2	-1	2

Como los puntos (-2,2) y (-2,-1) pertenecen a las gráficas de las funciones y' e y, respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$y'(-2)=2 \Rightarrow 24-48+a=2 \Rightarrow a=26$$

$$y(-2)=-1 \Rightarrow -16+48-2a+b=-1 \overset{1}{\Rightarrow} b=-1+16-48+52 \Rightarrow b=19$$

1 Ya que a=26.

Ejercicio 5: *Calcula una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:*

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$ *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx=\int x^{-1/2}\cdot\ln x\cdot dx\overset{1}{=}2x^{1/2}\cdot\ln x-2\cdot\int x^{-1/2}\cdot dx\overset{2}{=}$$

$$=2x^{1/2}\cdot\ln x-2\cdot\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}+C=2x^{1/2}\cdot\ln x-4x^{1/2}+C=2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}+C$$

S	D	I
+	$\ln x$	$x^{-1/2}$
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}=2x^{1/2}$

Comprobación:

$$(2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\ln x+2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

[1] Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.
[2] Esta integral es inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 6: *Discute y resuelve, en su caso, el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ my-z=m \\ mx+2z=0 \end{array}\right\}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ m & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ 0 & -3m & 2-m & -5m \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ 0 & 0 & -1-m & -2m \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ -1-m=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si m=-1, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

2º) Si m=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ -z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-3y \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{array}\right.$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ my-z=m \\ -(1+m)z=-2m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{2m}{m+1}} \Rightarrow my=m+\frac{2m}{m+1}=\frac{m^2+m+2m}{m+1}=\frac{m(m+3)}{m+1} \Rightarrow \boxed{y=\frac{m+3}{m+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=5-3y-z=5-3\cdot\frac{m+3}{m+1}-\frac{2m}{m+1}=\frac{5m+5-3m-9-2m}{m+1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{-4}{m+1}}$$

---

1 3ªf-m·1ªf.

2 3ªf+3·2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

4 Ya que la tercera ecuación es incompatible.

5 3ªf-2ªf.

Ejercicio 7: *Dadas las matrices A y B, halla X si $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$:*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-3+2=-1$$

Por tanto:[1]

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} A^*=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} (A^*)'=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien:

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=B \Rightarrow X=A\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=B$$

---

[1] También puede calcularse la inversa de A por el método de Gauss.
[2] Calculamos la adjunta de A.
[3] Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 8: *Prueba la siguiente identidad:*

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} (x+1)^3$$

1 1ªc-4ªc; 2ªc-4ªc; 3ªc-4ªc

2 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

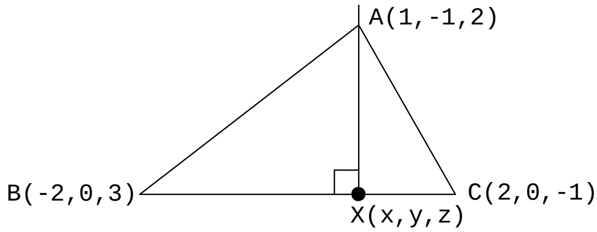
Ejercicio 9: *Dados los puntos A(1,-1,2), B(-2,0,3) y C(2,0,-1), halla la ecuación continua de la altura del triángulo ABC relativa al vértice A.*

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sea ABC el triángulo dado. Trazamos la altura correspondiente al vértice A que corta al lado opuesto en X:



Como $[\overrightarrow{BX}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{BA}]$ sobre $[\overrightarrow{BC}]$:

$$[\overrightarrow{BX}]=\frac{[\overrightarrow{BA}]\cdot[\overrightarrow{BC}]}{[\overrightarrow{BC}]\cdot[\overrightarrow{BC}]}\cdot[\overrightarrow{BC}] \Rightarrow (x+2,y,z-3)=\frac{(3,-1,-1)\cdot(4,0,-4)}{(4,0,-4)\cdot(4,0,-4)}\cdot(4,0,-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2,y,z-3)=\frac{12+0+4}{16+0+16}\cdot(4,0,-4) \Rightarrow (x+2,y,z-3)=\frac{1}{2}\cdot(4,0,-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2,y,z-3)=(2,0,-2) \Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ y=0 \\ z-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow X(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{XA}]=(1,-1,1) \Rightarrow XA \equiv \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

* * *

También puede hallarse la altura calculando directamente un vector direccional: el producto vectorial de $[\overrightarrow{BC}]$ por un vector característico del plano ABC, ya que ambos son perpendiculares a dicha recta. O como intersección del plano ABC y el perpendicular a la recta BC que pasa por A. O hallando el punto X como intersección de este último plano con la recta BC. O teniendo en cuenta que el punto X está en la recta BC y que los vectores $[\overrightarrow{XA}]$ y $[\overrightarrow{BC}]$ son perpendiculares; o que X es el punto de la recta BC más próximo a A; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña B).[1]

[1] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ABX, siempre sale como una de las soluciones el punto B de la recta BC, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por B, se obtiene $AB^2+BB^2=AB^2$, esto es, $AB^2=AB^2$, lo que siempre es cierto.

Ejercicio 10: *Dadas las rectas r y s, halla la ecuación del plano que determinan y el ángulo que dicho plano forma con el eje de abscisas:*

$$r\equiv\begin{cases}2x+y=0\\z=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{0}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

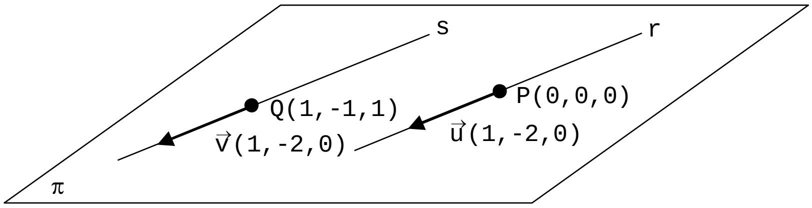
a) Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2x\\z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-2\alpha\\z=0\end{cases}\to\begin{cases}P(0,0,0)\\\vec{u}=(1,-2,0)\end{cases}$$

$$s\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{0}\to\begin{cases}Q(1,-1,1)\\\vec{v}=(1,-2,0)\end{cases}$$

Como las rectas tienen el mismo vector direccional, son paralelas.

Por tanto, una determinación lineal del plano π que definen dichas rectas es $(P,\vec{u},[\overrightarrow{PQ}])$:



Como $[\overrightarrow{PQ}]=(1,-1,1)$, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\1 & -2 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2x-y+z=0\Rightarrow 2x+y-z=0$$

b) Como el eje OX tiene por vector direccional $\vec{i}(1,0,0)$ y el vector característico del plano es $\vec{w}(2,1,-1)$:

$$\operatorname{sen}(OX,\pi)=\frac{|\vec{i}\cdot\vec{w}|}{|\vec{i}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{|(1,0,0)\cdot(2,1,-1)|}{|(1,0,0)|\cdot|(2,1,-1)|}=$$

$$=\frac{2}{1\cdot\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\Rightarrow(OX,\pi)=54^{o}44'8,2''$$