1) (1p) Clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$$

2) (1p) Halla la derivada de la siguiente función en x=1:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

3) (1p) Halla la ecuación implícita de la recta tangente a la curva de ecuación $x^3+xy-2y^2=0$ en el punto de ordenada 1.

4) (1p) Demuestra que la siguiente función tiene un mínimo relativo en el intervalo (0,1). Menciona los resultados teóricos que utilices:

$$f(x)=x^3-2x+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

5) (1p) Halla una primitiva de la función $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ y comprueba el resultado.

6) (1p) Discute y resuelve, en su caso, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+az=a \\ x+y+az=a \\ x+ay+a^2z=a^2 \\ ax+a^2y+a^3z=a \end{cases}$$

7) (1p) Halla la inversa de la siguiente matriz y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8) (1p) Demuestra la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & x & x & 1 \\ x & x & 1 & x \\ x & 1 & x & x \end{vmatrix}=-(3x+1)(1-x)^3$$

9) (1p) Dados los vectores $\vec{a}(1,-1,2)$, $\vec{b}(-2,0,3)$ y $\vec{c}(2,0,-1)$, calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.

b) El área de la cara del tetraedro cuyos vértices son los extremos de dichos vectores dibujados con origen común.

10) (1p) Halla la ecuación continua de la recta que resulta al proyectar sobre el plano π la recta r:

$$\pi\equiv x-y+3z=28 \qquad r\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$$

Ejercicio 1: *Clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) La función f es continua en su dominio, ya que, si $a\in\mathrm{Dom}(f)$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=\frac{e^{1/a}-1}{e^{1/a}+1}=f(a)$$

3º) La función f tiene una discontinuidad de primera especie con salto finito en x=0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=\frac{e^{1/0^-}-1}{e^{1/0^-}+1}=\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\overset{2}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}\cdot(1/x)'}{e^{1/x}\cdot(1/x)'}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1$$

* * *

Como se indica en la nota 2, el límite lateral derecho de la función f en x=0 resulta ser, al dar el paso al límite, la indeterminación ∞/∞:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=\frac{e^{1/0^+}-1}{e^{1/0^+}+1}=\frac{e^{+\infty}-1}{e^{+\infty}+1}=\frac{+\infty-1}{+\infty+1}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando $e^{1/x}$ factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 2: *Halla la derivada de la siguiente función en x=1:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & si\ \ x\neq 1\\ 1 & si\ \ x=1\end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

La función es derivable en x=1 y su derivada es f'(1)=-1/2:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}\overset{1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{2(x-1)}\overset{3}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{2x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$$

---

1 Multiplicamos numerador y denominador por x-1.
2 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
3 Multiplicamos numerador y denominador por x.

Ejercicio 3: *Halla la ecuación implícita de la recta tangente a la curva de ecuación $x^3+xy-2y^2=0$ en el punto de ordenada 1.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la abscisa del punto de tangencia:

$$x^3+xy-2y^2=0 \overset{1}{\Rightarrow} x^3+x-2=0 \overset{2}{\Rightarrow} (x-1)(x^2+x+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \end{cases} \Rightarrow x=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[3]

$$x^3+xy-2y^2=0 \Rightarrow 3x^2+y+xy'-4yy'=0$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$3x^2+y+xy'-4yy'=0 \overset{4}{\Rightarrow} 3+1+y'-4y'=0 \Rightarrow 3y'=4 \Rightarrow y'=4/3$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	4/3

4º) Por tanto, la ecuación implícita de la recta tangente es:

$$y-1=\frac{4}{3}\cdot(x-1) \Rightarrow 3y-3=4x-4 \Rightarrow 4x-3y-1=0$$

[1] Ya que y=1.
[2] Descomponemos el polinomio por Ruffini.
[3] Por el método de derivación implícita.
[4] Ya que x=1 e y=1.

Ejercicio 4: Demuestra que la siguiente función tiene un mínimo relativo en el intervalo (0,1). Menciona los resultados teóricos que utilices:

$$f(x)=x^3-2x+sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \qquad \text{(1 PUNTO)}$$

* * *

Solución:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

$$f'(x)=3x^2-2+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (0,1) tal que $f'(\alpha)=0$.

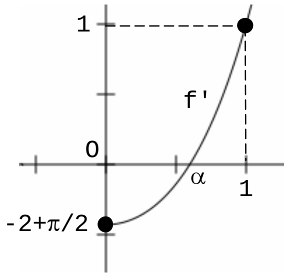
En efecto:

1ª) $f'(0)\cdot f'(1)<0$:

- $f'(0)=-2+\pi/2<0$.
- $f'(1)=3-2=1>0$.

2ª) f' es continua en [0,1]:

- $[0,1]\subset Dom(f')=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[0,1]$:



$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[3x^2-2+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right] \stackrel{1}{=} 3a^2-2+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un mínimo relativo.

[1] Para calcular el límite del último sumando hemos aplicado la regla del límite de la composición.

Ejercicio 5: *Halla una primitiva de la función f(x)=arc tg x y comprueba el resultado.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

$$\int \text{arc tg}\, x\cdot dx \overset{1}{=} x\cdot\text{arc tg}\, x-\int\frac{x}{1+x^2}\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=x\cdot\text{arc tg}\, x-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{1+x^2}\cdot dx=x\cdot\text{arc tg}\, x-\frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)+C$$

S	D	I
+	$\text{arc tg}\, x$	1
-	$\frac{1}{1+x^2}$	x

Comprobación:

$$\left[x\cdot\text{arc tg}\, x-\frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)\right]'=\text{arc tg}\, x+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=$$

$$=\text{arc tg}\, x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\text{arc tg}\, x$$

[1] Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

[2] Multiplicamos y dividimos la integral por 2. De este modo la convertimos en una integral casi inmediata de tipo logaritmo. Aunque también se puede hacer con el cambio de variable $1+x^2=t$, $2x\cdot dx=dt$.

Ejercicio 6: *Discute y resuelve, en su caso, el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} x+ay+az=a \\ x+y+az=a \\ x+ay+a^2z=a^2 \\ ax+a^2y+a^3z=a \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ a & a^2 & a^3 & a \end{array}\right) \underset{\sim}{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & a^2-a \\ 0 & 0 & a^3-a^2 & a-a^2 \end{array}\right) \underset{\sim}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & a & a & a \\ 0 & \mathbf{1-a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-a} & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a-a^3} \end{array}\right) \xrightarrow{3}$$

$$\to \begin{cases} 1-a=0 \\ a(a-1)=0 \\ a\cdot(1-a)\cdot(1+a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=0,\ a=1 \\ a=0,\ a=1,\ a=-1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 2y=0 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases}$$

3º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es incompatible.

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-a·1ªf.
[2] 4ªf-a·3ªf.
[3] Si $a-a^3\neq 0$, el sistema es incompatible (caso 4º). Estudiamos primero los demás casos.
[4] Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

Ejercicio 7: *Halla la inversa de la siguiente matriz y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&2\\0&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=6-2-2-3=-1$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-6&4&5\\-4&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2}(A^*)'=\begin{pmatrix}1&-6&-4\\-1&4&3\\-1&5&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-6&-4\\-1&4&3\\-1&5&3\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1&6&4\\1&-4&-3\\1&-5&-3\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}3&2&2\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&6&4\\1&-4&-3\\1&-5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2+2&18-8-10&12-6-6\\0+1-1&0-4+5&0-3+3\\-1-1+2&6+4-10&4+3-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

* * *

También puede hacerse por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&0&0&1\\0&1&-1&0&1&0\\3&2&2&1&0&0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&0&0&1\\0&1&-1&0&1&0\\0&5&-4&1&0&-3\end{array}\right)\overset{5}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&0&0&1\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&1&-5&-3\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-2&10&7\\0&1&0&1&-4&-3\\0&0&1&1&-5&-3\end{array}\right)\overset{7}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&6&4\\0&1&0&1&-4&-3\\0&0&1&1&-5&-3\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&6&4\\1&-4&-3\\1&-5&-3\end{pmatrix}$$

1 Calculamos la adjunta de A.
2 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.
3 1ªf↔3ªf.
4 3ªf-3·1ªf.
5 3ªf-5·2ªf.
6 2ªf+3ªf; 1ªf-2·3ªf.
7 1ªf+2ªf.

Ejercicio 8: *Demuestra la siguiente identidad:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & x & x & 1 \\ x & x & 1 & x \\ x & 1 & x & x \end{vmatrix} = -(3x+1)(1-x)^3$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & x & x & 1 \\ x & x & 1 & x \\ x & 1 & x & x \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 3x+1 & x & x & x \\ 3x+1 & x & x & 1 \\ 3x+1 & x & 1 & x \\ 3x+1 & 1 & x & x \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 3x+1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3x+1 & x & x & x \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \overset{4}{=} -(3x-1)(1-x)^3$$

1 $1^a c + 2^a c + 3^a c + 4^a c$.
2 $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$; $4^a f - 1^a f$.
3 $2^a c \leftrightarrow 4^a c$.
4 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 9: *Dados los vectores $\vec{a}(1,-1,2)$, $\vec{b}(-2,0,3)$ y $\vec{c}(2,0,-1)$, halla: **a)** el volumen del tetraedro que determinan; **b)** el área de la cara del tetraedro cuyos vértices son los extremos de dichos vectores dibujados con origen común.* (1 PUNTO)

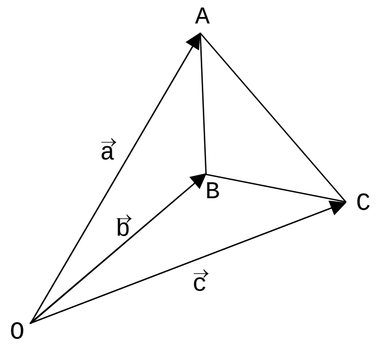
* * *

Solución:

a) Calculamos el volumen del tetraedro:

$$V=\frac{1}{6}\cdot|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-6+2|=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

b) Sea OABC el tetraedro que determinan los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$:



Si O es el origen de coordenadas, los extremos de los vectores son A(1,-1,2), B(-2,0,3) y C(2,0,-1). Por tanto, el área del triángulo ABC es:

$$S=\frac{1}{2}\cdot|[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|-4\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}|=|-2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}|=$$

$$=\sqrt{4+16+4}=2\cdot\sqrt{6}$$

Ejercicio 10: *Halla la ecuación continua de la recta que resulta al proyectar sobre el plano π la recta r:*

$$\pi \equiv x-y+3z=28 \qquad r\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$$ *(1 PUNTO)*

* * *

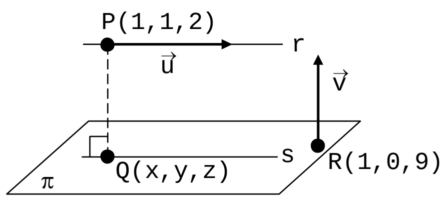
Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{u}=(-1,2,1) \end{cases}$$

La recta y el plano son paralelos, ya que el producto escalar del vector direccional de la recta y el vector característico del plano, $\vec{v}(1,-1,3)$, es cero: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,2,1)\cdot(1,-1,3)=-1-2+3=0$.

Sea R(1,0,9) un punto concreto del plano π y Q y s las proyecciones de P y r, respectivamente, sobre dicho plano:



Como el vector $[\overrightarrow{PQ}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{PR}]$ sobre el vector $\vec{v}(1,-1,3)$:

$$[\overrightarrow{PQ}]=\frac{[\overrightarrow{PR}]\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}=\frac{(0,-1,7)\cdot(1,-1,3)}{(1,-1,3)\cdot(1,-1,3)}\cdot\vec{v}=\frac{0+1+21}{1+1+9}\cdot\vec{v}=\frac{22}{11}\cdot\vec{v}=2\cdot\vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1,y-1,z-2)=(2,-2,6) \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-2 \\ z-2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=8 \end{cases} \Rightarrow Q(3,-1,8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\equiv\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-8}{1}$$

* * *

El punto Q también puede calcularse teniendo en cuenta que los vectores $[\overrightarrow{PQ}]$ y $\vec{v}$ son colineales.[1] O por la intersección de la recta PQ, que tiene por vector direccional $\vec{v}$, y el plano π. También puede calcularse la recta s como la intersección de este último plano y el perpendicular a él que contiene la recta r. Éste queda determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}(-1,2,1)$ y $\vec{v}(1,-1,3)$.

[1] En este caso, como $Q\in\pi$, $Q(28+\alpha-3\beta,\alpha,\beta)$.