18 de mayo de 2001.

1) (1p) Prueba que las coordenadas del vector $[\overrightarrow{AB}]$ se obtienen restando las del punto A a las del punto B.

2) (1p) Deduce la ecuación vectorial de la recta.

3) (1p) Estudia la posición relativa de dos planos.

4) (1p) Halla la distancia de un punto a una recta.

5) (6p) Si A(1,-1,8), B(2,1,7) y C(4,-4,14) son los vértices de un triángulo, se pide:

- **a)** Ecuación general del plano ABC.
- **b)** Ecuación de la altura correspondiente al vértice C.
- **c)** Ecuación de la bisectriz del ángulo A.
- **d)** Ángulo A.
- **e)** Área del triángulo.
- **f)** La proyección del eje de abscisas sobre el plano ABC.

Ejercicio 5: *Si A(1,-1,8), B(2,1,7) y C(4,-4,14) son los vértices de un triángulo, se pide:* ***a)*** *ecuación general del plano ABC;* ***b)*** *ecuación de la altura correspondiente al vértice C;* ***c)*** *ecuación de la bisectriz del ángulo A;* ***d)*** *ángulo A;* ***e)*** *área del triángulo;* ***f)*** *la proyección del eje de abscisas sobre el plano ABC.* (6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) El plano ABC queda determinado por el punto A(1,-1,8) y los vectores $[\overrightarrow{AB}]=(1,2,-1)$ y $[\overrightarrow{AC}]=(3,-3,6)$. Por tanto, su ecuación es:

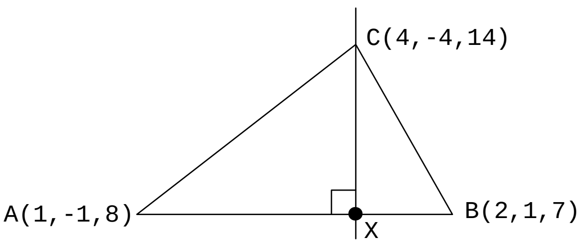
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 9(x-1)-9(y+1)-9(z-8)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1-y-1-z+8=0 \Rightarrow x-y-z+6=0$$

* * *

Otra forma de hacerlo consiste en calcular un vector característico del plano ABC multiplicando vectorialmente $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{AC}]$. Con lo que tendríamos la ecuación general de dicho plano, salvo el término independiente, que se calcularía con el punto A, por ejemplo.

b) Sea ABC el triángulo dado. Trazamos la altura correspondiente al vértice C que corta al lado opuesto en X:



Como la recta AB pasa por el punto A(1,-1,8) y $[\overrightarrow{AB}]=(1,2,-1)$ es un vector direccional, sus ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=8-\alpha \end{cases}$$

Como X está en la recta AB, satisface su ecuación:

$$X(1+\alpha,-1+2\alpha,8-\alpha)$$

Por tanto, $[\overrightarrow{XC}]=(3-\alpha,-3-2\alpha,6+\alpha)$.

Como los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{XC}]$ son perpendiculares, su producto escalar es cero:

$$[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{XC}]=0 \Rightarrow (1,2,-1)\cdot(3-\alpha,-3-2\alpha,6+\alpha)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-\alpha-6-4\alpha-6-\alpha=0 \Rightarrow 6\alpha=-9 \Rightarrow \alpha=-3/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{XC}]=(3+3/2,-3+6/2,6-3/2)=(9/2,0,9/2)=\frac{9}{2}\cdot(1,0,1)$$

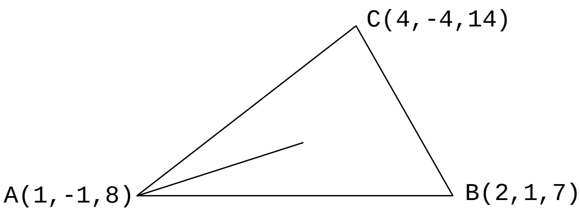
Por tanto, la ecuación continua de la altura es:

$$XC \equiv \frac{x-4}{1}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-14}{1}$$

* * *

El parámetro α también se puede calcular teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano perpendicular a AB que pasa por C; o que X es el punto de la recta AB más próximo a C; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ACX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña A).[1] También puede hallarse la altura calculando un vector direccional: el producto vectorial de $[\overrightarrow{AB}]$ y el característico del plano ABC, ya que ambos son perpendiculares a dicha recta; o hallando el punto X(x,y,z) teniendo en cuenta que $[\overrightarrow{AX}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{AC}]$ sobre el vector $[\overrightarrow{AB}]$. Por último, se puede obtener la altura como intersección del plano ABC y el perpendicular a la recta AB que pasa por C.

c) Para calcular la bisectriz del ángulo A necesitamos dos vectores del mismo módulo que sean colineales con $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{AC}]$:



Calculamos, pues, los módulos de $[\overrightarrow{AB}]=(1,2,-1)$ y $[\overrightarrow{AC}]=(3,-3,6)$:

$$|[\overrightarrow{AB}]|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6};\quad |[\overrightarrow{AC}]|=\sqrt{9+9+36}=3\sqrt{6}$$

Por tanto, un vector direccional de la bisectriz del ángulo A es:

$$\vec{u}=[\overrightarrow{AB}]+\frac{1}{3}\cdot[\overrightarrow{AC}]=(1,2,-1)+\frac{1}{3}\cdot(3,-3,6)=(1,2,-1)+(1,-1,2)=(2,1,1)$$

Y como la bisectriz pasa por el punto A(1,-1,8), su ecuación continua es la siguiente:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-8}{1}$$

[1] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ACX, siempre sale como una de las soluciones el punto A de la recta AB, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por A, se obtiene $AA^2+AC^2=AC^2$, esto es, $AC^2=AC^2$, lo que siempre es cierto.

d) Como A(1,-1,8), B(2,1,7) y C(4,-4,14), el ángulo A lo obtenemos a partir de su coseno:

$$\cos A=\cos([\overrightarrow{AB}],[\overrightarrow{AC}])=\frac{[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{AC}]}{|[\overrightarrow{AB}]|\cdot|[\overrightarrow{AC}]|}=\frac{(1,2,-1)\cdot(3,-3,6)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{9+9+36}}=$$

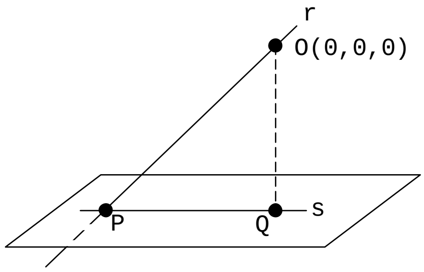
$$=\frac{3-6-6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}}=\frac{-9}{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=120^{o}$$

e) El área del triángulo determinado por los puntos A(1,-1,8), B(2,1,7) y C(4,-4,14) es la siguiente:

$$S=\frac{1}{2}\cdot|[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]|\overset{1}{=}\frac{1}{2}\cdot|[\overrightarrow{AB}]|\cdot|[\overrightarrow{AC}]|\cdot\text{sen}([\overrightarrow{AB}],[\overrightarrow{AC}])=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}\cdot\text{sen}\,120=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}$$

f) Sea r el eje de abscisas, P el punto en el que corta al plano ABC, y Q y s las proyecciones del origen de coordenadas y del eje OX sobre dicho plano:



Como el eje OX pasa por O(0,0,0) y tiene por vector direccional al vector $\vec{i}(1,0,0)$, sus ecuaciones paramétricas son: $x=\alpha$, $y=0$, $z=0$.

Como P pertenece a dicho eje, $P(\alpha,0,0)$.

Como P pertenece al plano $ABC\equiv x-y-z+6=0$,[2] satisface su ecuación:

$$\alpha+6=0\Rightarrow\alpha=-6\Rightarrow P(-6,0,0)$$

Como $\vec{u}(1,-1,-1)$ es un vector característico del plano e $\vec{i}$ un vector direccional de la recta r, un vector direccional de la recta s es el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}\wedge\vec{i}$, ya que ambos son perpendiculares a s:[3]

[1] Utilizamos la fórmula del módulo del producto vectorial. También puede hacerse calculando el producto $[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]$.

[2] La ecuación de este plano la hemos obtenido en el apartado a.

[3] Otra forma de calcular dicho vector consiste en hallar el punto Q. Por ejemplo, como intersección de la recta OQ con el plano ABC; o teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{OQ}]$ es colineal con el vector característico del plano ABC; o que $[\overrightarrow{OQ}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{OP}]$ sobre el vector característico del plano ABC.

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{i})=\vec{u}\wedge\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\vec{u}\wedge(-\vec{j}+\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=-(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

La ecuación continua de la recta s es:

$$\frac{x+6}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

* * *

También puede calcularse la recta s como intersección del plano ABC y el perpendicular a él que contiene la recta r. Éste queda determinado por el punto O y los vectores $\vec{u}(1,-1,-1)$ e $\vec{i}(1,0,0)$.