1) (4p) Teoría:

a) Prueba que, si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ son dos puntos del espacio, $[\overrightarrow{AB}]=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

b) Deduce la ecuación continua de la recta.

c) Estudia la posición relativa de dos planos.

d) Deduce la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

2) (2p) Los puntos A(-1,2,5), B(2,1,6), C(4,1,7) y D(-1,5,6) son los vértices de un tetraedro. Halla:

a) La ecuación de una de sus caras.

b) La ecuación de una de sus aristas.

c) La ecuación de una de sus alturas.

d) Su volumen.

3) (2p) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A, es coplanaria con la recta r y paralela al plano π:

$$A(1,1,1) \qquad r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \qquad \pi\equiv -x+2y+z=0$$

4) (2p) De todos los planos que pasan por el punto P(-1,8,3), halla la ecuación del más alejado del origen de coordenadas.

Ejercicio 2: *Los puntos A(-1,2,5), B(2,1,6), C(4,1,7) y D(-1,5,6) son los vértices de un tetraedro. Halla:* ***a)*** *la ecuación de una de sus caras;* ***b)*** *la ecuación de una de sus aristas;* ***c)*** *la ecuación de una de sus alturas;* ***d)*** *su volumen.* *(2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a) Por ejemplo, la cara ABC.

El plano ABC queda determinado por el punto A(-1,2,5), y los vectores $[\overrightarrow{AB}]=(3,-1,1)$ y $[\overrightarrow{AC}]=(5,-1,2)$. Por tanto, su ecuación general es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(x+1)-(y-2)+2(z-5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-1-y+2+2z-10=0 \Rightarrow x+y-2z+9=0$$

* * *

Otra forma de hacerlo consiste en calcular un vector característico del plano ABC multiplicando vectorialmente $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{AC}]$. Con lo que tendríamos la ecuación general de dicho plano, salvo el término independiente, que se calcularía con el punto A, por ejemplo.

b) Por ejemplo AB.

Como la recta AB pasa por el punto A(-1,2,5) y tiene como vector direccional al vector $[\overrightarrow{AB}]=(3,-1,1)$, su ecuación continua es:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-5}{1}$$

c) Por ejemplo, la relativa al vértice D.

Como dicha altura pasa por el punto D(-1,5,6) y tiene por vector direccional el vector característico del plano ABC, $\vec{v}=(1,1,-2)$, su ecuación continua es:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{-2}$$

d) Como $[\overrightarrow{AB}]=(3,-1,1)$, $[\overrightarrow{AC}]=(5,-1,2)$ y $[\overrightarrow{AD}]=(0,3,1)$:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|[[\overrightarrow{AB}],[\overrightarrow{AC}],[\overrightarrow{AD}]]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-3+15-18+5|=\frac{1}{6}$$

Ejercicio 3: *Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A, es coplanaria con la recta r y paralela al plano π:*

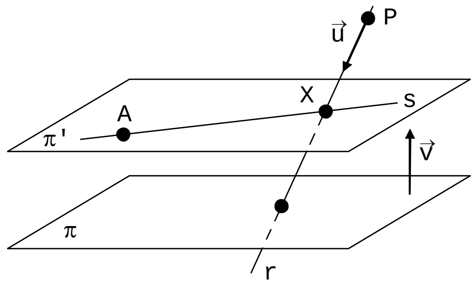
$$A(1,1,1) \qquad r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \qquad \pi\equiv -x+2y+z=0$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos las ecuaciones paramétricas (y una determinación lineal) de la recta r:



$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2\alpha \\ z=3\alpha \end{cases} \to \begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{u}=(1,2,3) \end{cases}$$

Como la recta s pasa por el punto A y es paralela al plano π, se encuentra en el plano π' que pasa por el punto A(1,1,1) y es paralelo al plano π:

$$-x+2y+z+D=0 \Rightarrow -1+2+1+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \pi'\equiv -x+2y+z-2=0$$

Como el punto X, en el que se cortan las rectas r y s, pertenece a r, satisface su ecuación. Por tanto:

$$X(1+\alpha,2\alpha,3\alpha)$$

Y como este punto pertenece al plano π':

$$-1-\alpha+4\alpha+3\alpha-2=0 \Rightarrow 6\alpha=3 \Rightarrow \alpha=1/2 \Rightarrow X(3/2,1,3/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AX}]=(1/2,0,1/2)=\frac{1}{2}\cdot(1,0,1) \Rightarrow s\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$$

* * *

También puede calcularse α teniendo en cuenta que, como A no pertenece a la recta r, ya que no satisface su ecuación, el vector $[\overrightarrow{AX}]$ es un vector direccional de s, que es perpendicular a $\vec{v}(-1,2,1)$, ya que s es paralela al plano π. Otra forma de hallar s es como intersección del plano π' y el definido por el punto A y la recta r.[1] O calculando directamente un vector direccional de s, éste es el producto vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}\wedge[\overrightarrow{PA}]$, ya que ambos son perpendiculares a la recta s.

[1] Este segundo plano queda determinado, evidentemente, por el punto P y los vectores $[\overrightarrow{PA}]$ y $\vec{u}$, pero también puede calcularse teniendo en cuenta que es el plano del haz de arista r, $\alpha(2x-y-2)+\beta(3y-2z)=0$, que pasa por A.

Ejercicio 4: *De todos los planos que pasan por el punto P(-1,8,3), halla la ecuación del más alejado del origen de coordenadas.* *(2 PUNTOS)*

** * **

Solución:

Si π es el plano más alejado del origen de coordenadas que pasa por el punto P, un vector característico de dicho plano es:

$$[\overrightarrow{OP}]=(-1,8,3)=-(1,-8,-3)$$

Por tanto, su ecuación es:

$$x-8y-3z+D=0$$

Como el punto P(-1,8,3) se encuentra en dicho plano, satisface su ecuación:

$$-1-64-9+D=0 \Rightarrow D=74$$

Por tanto:

$$\pi \equiv x-8y-3z+74=0$$