

16 de mayo de 2008.

1) (1p) Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio, demuestra que $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

2) (1p) Deduce la ecuación vectorial de la recta.

3) (1p) Estudia la posición relativa de recta y plano.

4) (1,7p) Halla la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π :

$$P(1, 3, 1) \quad r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-2} \quad \pi \equiv x - 2z = 0$$

5) (1,8p) Halla el valor del parámetro k para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \quad s \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{k} = \frac{z+4}{3}$$

6) (1,7p) Calcula la proyección del punto $P(2, -1, 3)$ sobre la recta de ecuaciones paramétricas: $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

7) (1,8p) Halla el ángulo que forma el eje de abscisas con el plano que pasa por $A(2, 2, 1)$, $B(1, -2, 0)$ y $C(2, 0, 1)$.

Ejercicio 4: Halla la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π :

$$P(1,3,1) \quad r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-2} \quad \pi \equiv x-2z=0 \quad (1,7 \text{ PUNTOS})$$

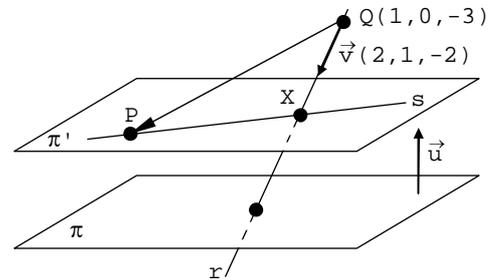
* * *

Solución:

La recta s se encuentra en el plano π' que pasa por el punto P y es paralelo a π , ya que es paralela al plano π :

$$x-2z+D=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 1-2+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi' \equiv x-2z+1=0$$

La recta s también se encuentra en el plano π'' determinado por el punto P y la recta r , ya que las rectas r y s se cortan. Ahora bien, dicho plano queda determinado por el punto $Q(1,0,-3)$ y los vectores $\vec{v}=(2,1,-2)$ y $[\vec{QP}]=(0,3,4)$:²



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10(x-1)-8y+6(z+3)=0 \Rightarrow 5(x-1)-4y+3(z+3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-5-4y+3z+9=0 \Rightarrow \pi'' \equiv 5x-4y+3z+4=0$$

La ecuación continua de la recta s se obtiene por intersección de ambos planos:

$$\begin{cases} x-2z=-1 \\ 5x-4y+3z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ 4y=4+5x+3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ 4y=4-5+10z+3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1/4+(13/4)\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(-1, -1/4, 0) \\ \vec{u}=(8, 13, 4) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{8} = \frac{y-3}{13} = \frac{z-1}{4}$$

* * *

También puede calcularse la recta s teniendo en cuenta que el producto vectorial de los vectores \vec{u} y $\vec{v} \wedge [\vec{QP}]$ es un vector direccional de la recta s , ya que ambos son perpendiculares a ella. O calculando el punto de corte de las rectas r y s : $X(1+2\alpha, \alpha, -3-2\alpha)$, ya que está en r . Y para calcular el parámetro basta darse cuenta de que dicho punto pertenece al plano π' o que el vector $[\vec{PX}]$, que es un vector direccional de la recta s , pues P no pertenece a la recta r , ya que no satisface su ecuación, es perpendicular al vector \vec{u} , pues la recta s es paralela al plano π .

¹ Ya que $P \in \pi'$.

² Otra forma de hallarlo es teniendo en cuenta que se trata del plano del haz de arista r , $\alpha(x-2y-1)+\beta(2y+z+3)=0$, que pasa por el punto P .

Ejercicio 5: Halla el valor del parámetro k , para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \qquad s \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{k} = \frac{z+4}{3} \qquad (1,8 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \rightarrow \begin{cases} P(1, 1, -2) \\ \vec{u} = (1, -1, 2) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{k} = \frac{z+4}{3} \rightarrow \begin{cases} Q(-5, 3, -4) \\ \vec{v} = (4, k, 3) \end{cases}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas:

$$\frac{1}{4} \neq \frac{2}{3}$$

Por tanto, para que dichas rectas sean coplanarias los vectores $[\vec{PQ}] = (-6, 2, -2)$, \vec{u} y \vec{v} deben ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & k & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18 - 2k + 16 - 8 + 12k - 6 = 0 \Rightarrow 10k = -20 \Rightarrow k = -2$$

* * *

Otra forma de razonar sería la siguiente. Como las rectas son coplanarias y no son paralelas, se cortan. Por tanto, el siguiente sistema debe ser compatible determinado:¹

$$\begin{cases} 1 + \alpha = -5 + 4\beta \\ 1 - \alpha = 3 + k\beta \\ -2 + 2\alpha = -4 + 3\beta \end{cases}$$

¹ Ya que el punto de corte pertenece a ambas rectas y, por tanto, satisface las ecuaciones de ambas.

Ejercicio 6: Calcula la proyección del punto $P(2,-1,3)$ sobre la recta de ecuaciones paramétricas: $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$. (1,7 PUNTOS)

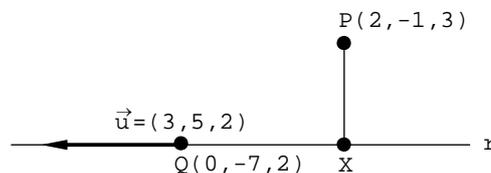
* * *

Solución:

Sea r la recta dada y X la proyección del punto P sobre ella.

Calculamos una determinación lineal de r :

$$\begin{cases} x=3t \\ y=-7+5t \\ z=2+2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(0,-7,2) \\ \vec{u}=(3,5,2) \end{cases}$$



Como X pertenece a r , satisface su ecuación: $X(3t, -7+5t, 2+2t)$.

Y al ser el punto de la recta r más próximo a P , la distancia entre ellos es mínima:

$$d=d(P,X)=\sqrt{(3t-2)^2+(-6+5t)^2+(-1+2t)^2}$$

Como $d>0$, podemos sustituirla por su cuadrado:

$$\begin{aligned} C=d^2 &= (3t-2)^2+(-6+5t)^2+(-1+2t)^2= \\ &= 9t^2-12t+4+36-60t+25t^2+1-4t+4t^2=38t^2-76t+41 \end{aligned}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=76t-76=0 \Rightarrow 76t=76 \Rightarrow t=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,¹ derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $t=1$:

$$C''=76 \Rightarrow C''(1)=76>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } t=1$$

Por tanto, $X(3,-2,4)$.

* * *

También puede calcularse el parámetro t teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano perpendicular a la recta r que pasa por P ;² o que los vectores $[\vec{PX}]$ y \vec{u} son perpendiculares; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PQX (en este caso, además de X , te saldrá como solución extraña Q).³ El punto $X(x,y,z)$ puede calcularse también directamente si se observa que $[\vec{QX}]$ es la proyección de $[\vec{QP}]$ sobre \vec{u} .

¹ También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

² Dicho plano tiene por vector característico el direccional de la recta r .

³ Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo PQX , siempre sale como una de las soluciones el punto Q de la recta r , ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por Q , se obtiene $PQ^2+QQ^2=PQ^2$, esto es, $PQ^2=PQ^2$, lo que siempre es cierto.

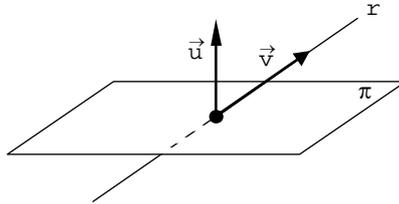
Ejercicio 7: Halla el ángulo que forma el eje de abscisas con el plano que pasa por $A(2,2,1)$, $B(1,-2,0)$ y $C(2,0,1)$.

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea r el eje de abscisas y π el plano determinado por los puntos A , B y C :



Como r es el eje de abscisas, $\vec{v} = \vec{i} = (1, 0, 0)$:

Un vector característico del plano π es:

$$\vec{u} = [\vec{AB}] \wedge [\vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{sen}(r, \pi) &= |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(-2, 0, 2) \cdot (1, 0, 0)|}{\sqrt{4+4} \cdot 1} = \\ &= \frac{|-2|}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (r, \pi) = 45^\circ \end{aligned}$$