

1) (1p) Deduce la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene a $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ por vector direccional.

2) (1p) Estudia la posición relativa de dos planos.

3) (1p) Prueba la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

4) (1,7p) Calcula la ecuación continua de la proyección de la recta r sobre el plano π :

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = z \qquad \pi \equiv x-y-z+5=0$$

5) (1,7p) Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π :

$$P(1, 0, 5) \qquad r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y+3=0 \end{cases} \qquad \pi \equiv x+2y-3z+1=0$$

6) (1,8p) Dado el triángulo de vértices $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ y $C(-5, 14, -3)$, halla:

a) El ángulo B .

b) El área del triángulo ABC .

7) (1,8p) Comprueba que las rectas r y s son paralelas y calcula la distancia entre ellas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{1}$$

Ejercicio 4: Calcula la ecuación continua de la proyección de la recta r sobre el plano π :

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = z$$

$$\pi \equiv x - y - z + 5 = 0$$

(1, 7 PUNTOS)

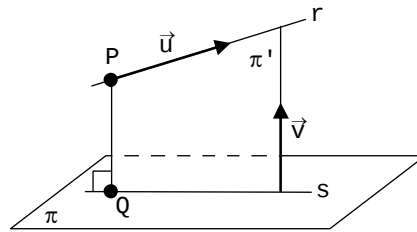
* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r :

$$\frac{x-1}{2} = y+3 = z \Rightarrow \begin{cases} P(1, -3, 0) \\ \vec{u} = (2, 1, 1) \end{cases}$$

Sea π' el plano perpendicular a π que contiene la recta r :



El plano π' queda determinado por el punto $P(1, -3, 0)$, el vector direccional de la recta r , $\vec{u}(2, 1, 1)$, y el vector característico del plano π , $\vec{v}(1, -1, -1)$. Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(y+3) - 3z = 0 \Rightarrow y - z + 3 = 0$$

La recta s es la intersección de los planos π y π' :

$$\begin{cases} x - y - z + 5 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 + y + z \\ y = -3 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 + 2\alpha \\ y = -3 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x+8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$$

* * *

También puede hacerse calculando un punto y un vector direccional de la recta s . El punto se obtendría como intersección de la recta r y el plano π ; y el vector direccional, multiplicando vectorialmente los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ya que ambos son perpendiculares a la recta s . Ahora bien, como en este caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares,¹ las rectas r y s son paralelas, con lo que tienen el mismo vector direccional. El punto lo obtendríamos, por ejemplo, como intersección de la recta PQ y el plano π . O teniendo en cuenta que el vector $[\vec{PQ}]$ es colineal con $\vec{v}$ o que es la proyección del vector $[\vec{PR}]$ sobre $\vec{v}$, siendo R un punto del plano π , por ejemplo $(0, 0, 5)$.

¹ Ya que su producto escalar es cero.

Ejercicio 5: Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π :

$$P(1, 0, 5) \quad r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y+3=0 \end{cases} \quad \pi \equiv x+2y-3z+1=0 \quad (1, 7 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\alpha \\ y=-3 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(0, -3, 0) \\ \vec{u}=(2, 0, 1) \end{cases}$$

El plano que buscamos está determinado por el punto $P(1, 0, 5)$, ya que pasa por él, el vector direccional de la recta r , $\vec{u}(2, 0, 1)$, por ser paralelo a ella, y el característico del plano π , $\vec{v}(1, 2, -3)$, por ser perpendicular a él. Por tanto, su ecuación general es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1)+7y+4(z-5)=0 \Rightarrow -2x+2+7y+4z-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-7y-4z+18=0$$

Ejercicio 6: Dado el triángulo de vértices $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ y $C(-5, 14, -3)$, halla: **a)** el ángulo B; **b)** el área del triángulo ABC.

(1, 8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Como $[\vec{BA}] = (2, -3, 6)$ y $[\vec{BC}] = (-6, 12, 4)$:

$$\begin{aligned} \cos B &= \cos([\vec{BA}], [\vec{BC}]) = \frac{[\vec{BA}] \cdot [\vec{BC}]}{|[\vec{BA}]| \cdot |[\vec{BC}]|} = \frac{(2, -3, 6) \cdot (-6, 12, 4)}{\sqrt{4+9+36} \cdot \sqrt{36+144+16}} = \\ &= \frac{-12-36+24}{7 \cdot 14} = \frac{-12}{49} \Rightarrow B = 104^{\circ}10' \end{aligned}$$

b) El área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{|[\vec{BA}] \wedge [\vec{BC}]|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ -6 & 12 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |-84\vec{i} - 44\vec{j} + 6\vec{k}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9028} = \sqrt{2257}$$

Ejercicio 7: Comprueba que las rectas r y s son paralelas y calcula la distancia entre ellas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{1} \quad (1,8 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0, 0, 3) \\ \vec{u} = (1, 2, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{1} \rightarrow \begin{cases} Q(0, 1, 5) \\ \vec{v} = (-1, -2, 1) \end{cases}$$

Como los vectores direccionales de las rectas son opuestos, las rectas son paralelas.

Como las rectas son paralelas y $[\vec{QP}] = (0, -1, -2)$:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|[\vec{QP}] \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{25+4+1}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$