1) (1,5p) Demuestra la fórmula de las coordenadas del punto medio de un segmento.

2) (1,5p) Demuestra la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

3) (1,7p) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por el punto P, es paralela al plano π y perpendicular a la recta r:

$$P(1,2,-1) \qquad \pi\equiv 2x+y-z=3 \qquad r\equiv\begin{cases}3y+z=7\\x+4y+z=8\end{cases}$$

4) (1,8p) Halla la ecuación general del plano que contiene a las rectas r y s:

$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{-1} \qquad s\equiv\begin{cases}x=7-2\alpha\\y=1+4\alpha\\z=3+2\alpha\end{cases}$$

5) (1,7p) Calcula la ecuación continua de la mediatriz del lado AB del triángulo de vértices A(0,0,4), B(0,-2,0) y C(3,0,0).

6) (1,8p) Halla la distancia entre las rectas r y s:

$$r\equiv\begin{cases}x+3y=1\\3y-z+2=0\end{cases} \qquad s\equiv x+1=-y+1=z$$

Ejercicio 3: *Calcula la ecuación de la recta s que pasa por el punto P, es paralela al plano π y perpendicular a la recta r:*

$$P(1,2,-1) \qquad \pi \equiv 2x+y-z=3 \qquad r\equiv\begin{cases}3y+z=7\\ x+4y+z=8\end{cases} \qquad \text{(1,7 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

Si la recta s es paralela al plano π, el vector característico del plano, $\vec{u}=(2,1,-1)$, es perpendicular a la recta s.

Si la recta s es perpendicular a r, el vector direccional de la recta r también es perpendicular a s:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

Por tanto, un vector direccional de la recta s es:

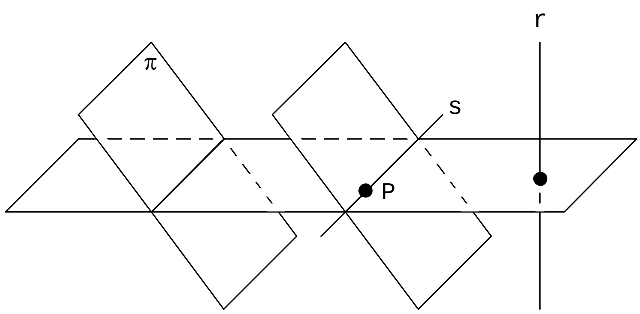
$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{vmatrix}=-2\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$$

Como la recta s pasa por el punto P(1,2,-1), su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+1}{3}$$

* * *

También puede calcularse como la intersección del plano que pasa por P y es paralelo a π con el plano que pasa por P y es perpendicular a r:[1]



[1] Observa que en el enunciado no se dice que la recta s corte perpendicularmente a r, sino que es perpendicular a r, cosa bien distinta.

Ejercicio 4: *Halla la ecuación general del plano que contiene a las rectas r y s:*

$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{-1} \qquad s\equiv\begin{cases}x=7-2\alpha\\ y=1+4\alpha\\ z=3+2\alpha\end{cases}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

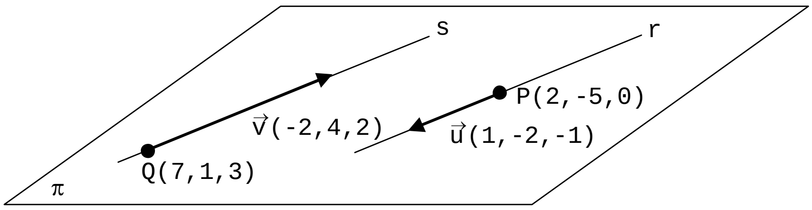
$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{-1}\ \rightarrow\ \begin{cases}P(2,-5,0)\\ \vec{u}=(1,-2,-1)\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}x=7-2\alpha\\ y=1+4\alpha\\ z=3+2\alpha\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}Q(7,1,3)\\ \vec{v}=(-2,4,2)\end{cases}$$

Evidentemente, las rectas son paralelas:

$$\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

Por tanto, una determinación lineal del plano π que definen dichas rectas es $(P,\vec{u},[\overrightarrow{PQ}])$:



Como $[\overrightarrow{PQ}]=(5,6,3)$, la ecuación del plano π es:

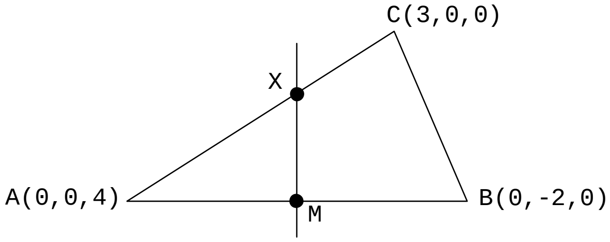
$$\begin{vmatrix}x-2 & y+5 & z\\ 1 & -2 & -1\\ 5 & 6 & 3\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ -8\cdot(y+5)+16\cdot z=0\ \Rightarrow\ -y-5+2z=0\ \Rightarrow\ y-2z+5=0$$

Ejercicio 5: *Calcula la ecuación continua de la mediatriz del lado AB del triángulo de vértices A(0,0,4), B(0,-2,0) y C(3,0,0).* (1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea M el punto medio del lado AB del triángulo ABC y MX la mediatriz de dicho lado:



Las coordenadas de M son la media aritmética de las coordenadas de los puntos A y B. Por tanto, M(0,-1,2).

Un vector característico del plano ABC es:

$$\vec{u}=[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & -4\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=8\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k}$$

Como los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{u}$ son perpendiculares a la mediatriz, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & -4\\ 8 & -12 & 6\end{vmatrix}=-60\vec{i}-32\vec{j}+16\vec{k}=-4\cdot(15\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k})$$

Por tanto, la ecuación continua de la mediatriz es:

$$\frac{x}{15}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{-4}$$

* * *

También puede calcularse la mediatriz como intersección del plano mediador del segmento AB y el plano ABC. O calculando el punto X. Como éste pertenece a la recta AC, sus coordenadas son X(3α,0,4-4α). El parámetro α se puede calcular teniendo en cuenta que los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{MX}]$ son perpendiculares; o considerando que el punto X pertenece al plano mediador del segmento AB; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AMX; o fijándose en que el vector $[\overrightarrow{AM}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{AX}]$ sobre $[\overrightarrow{AB}]$.

Ejercicio 6: *Halla la distancia entre las rectas r y s:*

$$r\equiv\begin{cases}x+3y=1\\3y-z+2=0\end{cases}\qquad s\equiv x+1=-y+1=z$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+3y=1\\3y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-3y\\z=2+3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-3\alpha\\y=\alpha\\z=2+3\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(1,0,2)\\\vec{u}=(-3,1,3)\end{cases}$$

$$s\equiv x+1=-y+1=z\Rightarrow\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}Q(-1,1,0)\\\vec{v}=(1,-1,1)\end{cases}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas:

$$\frac{-3}{1}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{3}{1}$$

Por tanto:

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-2&1&-2\\-3&1&3\\1&-1&1\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&1&3\\1&-1&1\end{matrix}\right\|}=$$

$$=\frac{|-2-6+3+2-6+3|}{|4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}|}=\frac{|-6|}{\sqrt{16+36+4}}=\frac{6}{\sqrt{56}}=\frac{6}{2\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$