1) (1,5p) Demuestra que, si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ son dos puntos del espacio, entonces $[\overrightarrow{AB}]=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

2) (1,5p) Si $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$, estudia su posición relativa.

3) (1,8p) Halla la ecuación del plano mediador del segmento de extremos A(-1,5,3) y B(1,1,1). Calcula su distancia al origen de coordenadas.

4) (1,7p) Halla los valores de a y b para que las rectas r y r' se corten perpendicularmente:

$$r \equiv \begin{cases} x=az+2 \\ y=z-3 \end{cases} \qquad r' \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{b}=z$$

5) (1,7p) Si A(2,2,5), B(3,3,2) y C está en la recta r, encuentra los vértices C y D del rectángulo ABCD:

$$r \equiv x=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-4}{2}$$

6) (1,8p) Dado el plano $\pi \equiv x+2y-2z=18$, halla:

a) El simétrico del origen de coordenadas respecto a π.

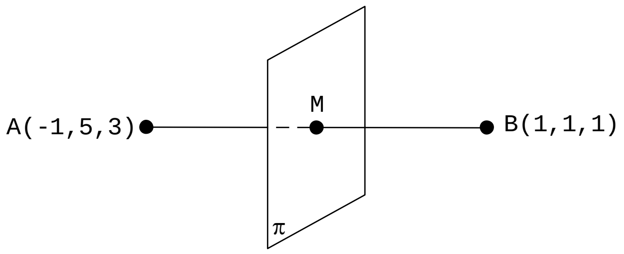
b) El ángulo que forma π con el eje OZ.

Ejercicio 3: *Halla la ecuación del plano mediador del segmento de extremos A(-1,5,3) y B(1,1,1). Calcula su distancia al origen de coordenadas.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a) Sea M el punto medio del segmento AB y π el plano mediador de dicho segmento:[1]



Como M es el punto medio del segmento AB:

$$M(0,3,2)$$

Como $[\overrightarrow{MB}]=(1,-2,-1)$ es un vector característico del plano π, su ecuación es:

$$\pi \equiv x-2y-z+D=0$$

Como el punto M pertenece al plano π, satisface su ecuación:

$$0-6-2+D=0 \Rightarrow D=8$$

Por tanto:

$$\pi \equiv x-2y-z+8=0$$

b) Calculamos la distancia del plano π al origen de coordenadas:

$$d(O,\pi)=\frac{|8|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$$

[1] Esta parte del ejercicio también puede hacerse utilizando la propiedad que caracteriza a los puntos del plano mediador del segmento AB. Si P es uno de ellos, d(P,A)=d(P,B).

Ejercicio 4: *Halla los valores de a y b para que las rectas r y r' se corten perpendicularmente:*

$$r \equiv \begin{cases} x=az+2 \\ y=z-3 \end{cases} \qquad r' \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{b}=z$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\begin{cases} x=az+2 \\ y=z-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+a\alpha \\ y=-3+\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2,-3,0) \\ \vec{u}=(a,1,1) \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{b}=z \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{b}=\frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} Q(1,-1,0) \\ \vec{v}=(2,b,1) \end{cases}$$

Como las rectas son perpendiculares, sus vectores direccionales también:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (a,1,1)\cdot(2,b,1)=0 \Rightarrow 2a+b+1=0$$

Como las rectas son secantes, los vectores $[\overrightarrow{PQ}]=(-1,2,0)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son coplanarios.[1] Por tanto:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -1+4+b-2a=0 \Rightarrow 2a-b-3=0$$

Por último, resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2a+b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} \begin{cases} 2a+b=-1 \\ -2b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-2 \end{cases}$$

[1] Otra forma de obtener la segunda ecuación consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones de las rectas r y r' sabiendo que es compatible determinado, ya que las rectas son secantes.

[2] A la segunda ecuación le restamos la primera.

Ejercicio 5: *Si A(2,2,5), B(3,3,2) y C está en la recta r, encuentra los vértices C y D del rectángulo ABCD:*

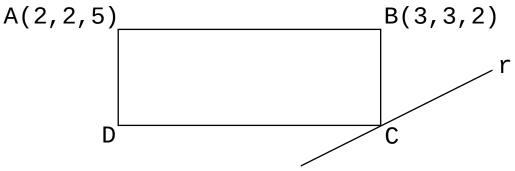
$$r\equiv x=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-4}{2}$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Consideremos el rectángulo ABCD, del que conocemos A, B y que el vértice C está en al recta r:



Obtenemos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$x=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-4}{2}=\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=6-\alpha \\ z=4+2\alpha \end{cases}$$

Como el punto C está en la recta r, satisface su ecuación:

$$C(\alpha,6-\alpha,4+2\alpha)$$

Como ABCD es un rectángulo, los vectores $[\overrightarrow{BA}]$ y $[\overrightarrow{BC}]$ son perpendiculares. Por tanto, su producto escalar es cero:

$$[\overrightarrow{BA}]\cdot[\overrightarrow{BC}]=0 \Rightarrow (-1,-1,3)\cdot(\alpha-3,3-\alpha,2+2\alpha)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha+3-3+\alpha+6+6\alpha=0 \Rightarrow 6\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow C(-1,7,2)$$

Como ABCD es un rectángulo, los vectores $[\overrightarrow{CD}]$ y $[\overrightarrow{BA}]$ coinciden. Por tanto, si D(x,y,z):[1]

$$[\overrightarrow{CD}]=[\overrightarrow{BA}] \Rightarrow (x+1,y-7,z-2)=(-1,-1,3) \Rightarrow \begin{cases} x+1=-1 \\ y-7=-1 \\ z-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow D(-2,6,5)$$

[1] Otra forma de calcular D es hallando el punto medio de la diagonal AC, que es también el punto medio de la diagonal BD. O utilizando la igualdad vectorial $[\overrightarrow{BD}]=[\overrightarrow{BA}]+[\overrightarrow{BC}]$.

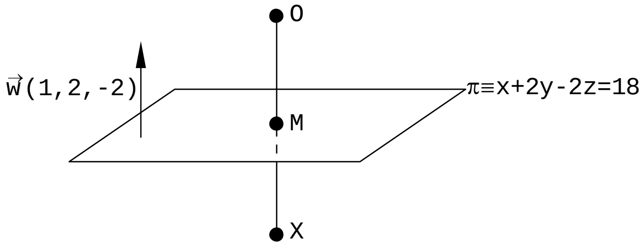
Ejercicio 6: *Dado el plano $\pi \equiv x+2y-2z=18$, halla:* ***a)*** *el simétrico del origen de coordenadas respecto a π;* ***b)*** *el ángulo que forma π con el eje OZ.*

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Sea X el punto simétrico de O respecto del plano π:



Como la recta OX es perpendicular al plano π, su vector direccional es el característico del plano π, $\vec{w}(1,2,-2)$. Y como pasa por el punto O(0,0,0), sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha \\ z=-2\alpha \end{cases}$$

Como M pertenece a la recta, satisface su ecuación:

$$M(\alpha,2\alpha,-2\alpha)$$

Como $M(\alpha,2\alpha,-2\alpha)$ pertenece al plano π, satisface su ecuación:

$$\alpha+4\alpha+4\alpha=18 \Rightarrow 9\alpha=18 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow M(2,4,-4)$$

Por último, como M es el punto medio del segmento OX:

$$X(4,8,-8)$$

* * *

Otra forma de calcular M es teniendo en cuenta que se trata del único punto del plano π[1] tal que el vector $[\overrightarrow{OM}]$ es colineal con el vector $\vec{w}$. También se puede calcular directamente el punto X considerando que el vector $[\overrightarrow{OX}]=2\cdot[\overrightarrow{OM}]$ y que $[\overrightarrow{OM}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{OQ}]$ sobre $\vec{w}$, siendo Q un punto cualquiera del plano π, por ejemplo (0,9,0).

b) Calculamos ahora el ángulo que forman el plano π y el eje OZ:

$$\mathrm{sen}(\pi,OZ)=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{k}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{k}|}=\frac{|(1,2,-2)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{1+4+4}\cdot 1}=\frac{|-2|}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow (\pi,OZ)=41^{o}48'37''$$

[1] Y, por tanto, $M(18-2\alpha+2\beta,\alpha,\beta)$.