1 de febrero de 2001.

1) (2p) Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

2) (2p) Enuncia y demuestra la regla de Barrow.

3) (2,4p) Calcula las siguientes integrales:

$$\int (\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) \cdot dx \qquad \int \frac{2x+5}{x^2+2x-3} \cdot dx$$

4) (1,2p) Halla:

$$\int_{1/2}^{e/2} \ln(2x) \cdot dx$$

5) (1,2p) Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y=x^2-6$ e $y=4x-x^2$.

6) (1,2p) Halla por el método de los trapecios el valor aproximado de la siguiente integral. Para ello, divide el intervalo en 10 partes iguales, y da el resultado con tres cifras decimales:

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x \cdot dx$$

Ejercicio 3: Calcula las siguientes integrales:

$$\int (\cos x+\cos^2 x+\mathrm{sen}^2 x)\cdot dx \qquad \int \frac{2x+5}{x^2+2x-3}\cdot dx \qquad (2,4\ \text{PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a)

$$\int (\cos x+\cos^2 x+\mathrm{sen}^2 x)\cdot dx \overset{1}{=} \int (1+\cos x)\cdot dx = \int 1\cdot dx+\int \cos x\cdot dx \overset{2}{=} x+\mathrm{sen}\,x+C$$

Comprobación:

$$(x+\mathrm{sen}\,x)' = 1+\cos x \overset{1}{=} \cos x+\cos^2 x+\mathrm{sen}^2 x$$

b) Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto:[3]

$$\frac{2x+5}{x^2+2x-3}=\frac{2x+5}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+5=A(x-1)+B(x+3) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=-3 \Rightarrow -1=-4A \Rightarrow A=1/4 \\ \text{Si } x=1 \Rightarrow 7=4B \Rightarrow B=7/4 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x-3}\cdot dx = \int \frac{1/4}{x+3}\cdot dx + \int \frac{7/4}{x-1}\cdot dx = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x+3}\cdot dx + \frac{7}{4}\cdot\int \frac{1}{x-1}\cdot dx \overset{4}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot \ln|x+3| + \frac{7}{4}\cdot \ln|x-1| + C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{1}{4}\cdot \ln|x+3|+\frac{7}{4}\cdot \ln|x-1|\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{1}{4(x+3)}+\frac{7}{4(x-1)}=$$

$$=\frac{x-1+7x+21}{4(x+3)(x-1)}=\frac{8x+20}{4(x+3)(x-1)}=\frac{4(2x+5)}{4(x+3)(x-1)}=\frac{2x+5}{x^2+2x-3}$$

1 Ya que $\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x=1$.

2 La primera integral es inmediata de tipo potencial y la segunda, inmediata de tipo seno.

3 Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

4 Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int_{1/2}^{e/2} \ln(2x)\cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int_{1/2}^{e/2} \ln(2x)\cdot dx \overset{1}{=} [x\cdot\ln(2x)-x]_{1/2}^{e/2} = \left(\frac{e}{2}\cdot\ln e-\frac{e}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

* * *

$$\int \ln(2x)\cdot dx \overset{2}{=} x\cdot\ln(2x)-\int 1\cdot dx \overset{3}{=} x\cdot\ln(2x)-x+C$$

S	D	I
+	$\ln(2x)$	1
-	$\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$	x

Comprobación:

$$[x\cdot\ln(2x)-x]'=\ln(2x)+x\cdot\frac{2}{2x}-1=\ln(2x)+1-1=\ln(2x)$$

[1] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
[2] Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.
[3] Esta integral es inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 5: Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y=x^2-6$ e $y=4x-x^2$. *(1,2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2-6 \\ y=4x-x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-6=4x-x^2 \Rightarrow 2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{4}=\frac{4\pm 8}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

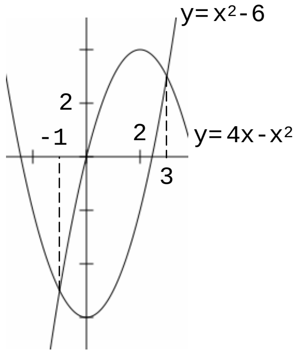
x	y_1	y_2
0	-6	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{3}(4x-x^2-x^2+6)\cdot dx=\int_{-1}^{3}(6+4x-2x^2)\cdot dx \overset{1}{=} \left[6x+2x^2-\frac{2}{3}\cdot x^3\right]_{-1}^{3}=$$

$$=(18+18-18)-(-6+2+2/3)=18+4-\frac{2}{3}=\frac{64}{3}$$

Representación gráfica:



1 Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 6: Halla por el método de los trapecios el valor aproximado de la integral. Para ello, divide el intervalo en 10 partes iguales, y da el resultado con tres cifras decimales:

$$\int_0^1 \text{arc sen}\, x \cdot dx$$ *(1,2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

$$\int_0^1 \text{arc sen}\, x \cdot dx \overset{1}{\simeq}$$

$$\simeq \left[\frac{\text{arc sen}\, 0 + \text{arc sen}\, 0{,}1}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{\text{arc sen}\, 0{,}1 + \text{arc sen}\, 0{,}2}{2} \cdot 0{,}1 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\text{arc sen}\, 0{,}8 + \text{arc sen}\, 0{,}9}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{\text{arc sen}\, 0{,}9 + \text{arc sen}\, 1}{2} \cdot 0{,}1\right] =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{\text{arc sen}\, 0}{2} + \text{arc sen}\, 0{,}1 + \text{arc sen}\, 0{,}2 + \ldots + \text{arc sen}\, 0{,}9 + \frac{\text{arc sen}\, 1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot (0 + 0{,}1001674 + 0{,}2013579 + 0{,}3046926 + 0{,}4115168 + 0{,}5235987 +$$

$$+ 0{,}6435011 + 0{,}7753975 + 0{,}9272952 + 1{,}1197695 + 0{,}7853981) = 0{,}579$$

---

[1] Hemos sustituido la integral de la función arco seno entre 0 y 1 por la suma de las áreas de 10 trapecios (el primero es un triángulo) de altura una décima y bases arc sen 0 y arc sen 0,1, el primero, arc sen 0,1 y arc sen 0,2, el segundo, etc, y, por último, arc sen 0,9 y arc sen 1, el décimo.