18 de febrero de 2005.

**1)** (2p) Define los siguientes conceptos:

**a)** Integral definida de una función.

**b)** Primitiva de una función.

**c)** Integral indefinida de una función.

**d)** Función integral.

**2)** (1p) Enuncia:

**a)** El teorema fundamental del cálculo integral.

**b)** La regla de Barrow.

**3)** (4,2p) Halla las siguientes integrales:

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot dx \qquad \int \sqrt{x}\cdot \ln x\cdot dx \qquad \int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\cdot dx$$

**4)** (1,4p) Calcula:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot dx$$

**5)** (1,4p) Halla el valor del parámetro positivo k para que el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{kx}$ y $g(x)=x^2/k$ sea de 3 unidades cuadradas.

**Ejercicio 3:** *Halla las siguientes integrales:*

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot dx \qquad \int\sqrt{x}\cdot \ln x\cdot dx \qquad \int\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\cdot dx$$ (4,2 PUNTOS)

* * *

**Solución:**

**a)**

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot dx \overset{1}{=} \frac{1}{2}\cdot\int(x^2-1)^{1/2}\cdot 2x\cdot dx \overset{2}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{1}{3}\cdot(x^2-1)^{3/2}+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{1}{3}\cdot(x^2-1)^{3/2}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2-1)^{1/2}\cdot 2x=x\cdot\sqrt{x^2-1}$$

**b)**

$$\int\sqrt{x}\cdot\ln x\cdot dx=\int x^{1/2}\cdot\ln x\cdot dx \overset{3}{=} \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{2}{3}\cdot\int x^{1/2}\cdot dx \overset{4}{=}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{4}{9}\cdot x^{3/2}+C$$

| S | D | I |
|---|---|---|
| + | $\ln x$ | $x^{1/2}$ |
| - | $1/x$ | $\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}=\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}$ |

Comprobación:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{4}{9}\cdot x^{3/2}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}\cdot\ln x+\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}=$$

$$=x^{1/2}\cdot\ln x+\frac{2}{3}\cdot x^{1/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{1/2}=\sqrt{x}\cdot\ln x$$

**c)** Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-4x^2+5x-2 \overset{5}{=} (x-2)(x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ x=1 \text{ doble}\end{cases}$$

Por tanto:[6]

$$\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=$$

---

1 Multiplicamos y dividimos por 2.

2 Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $x^2-1=t^2$, $2x\cdot dx=2t\cdot dt$ ($\Rightarrow x\cdot dx=t\cdot dt$). O $x^2-1=t$, $2x\cdot dx=dt$.

3 Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

4 Se trata de una integral inmediata de tipo potencial.

5 Descomponemos el polinomio en factores por Ruffini.

6 Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=A(x-1)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow 2=-C \Rightarrow C=-2 \\ \text{Si } x=2 \Rightarrow 3=A \\ \text{Si } x=-1 \overset{1}{\Rightarrow} 0=12+6B+6 \Rightarrow B=-3 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\cdot dx = \int \frac{3}{x-2}\cdot dx + \int \frac{-3}{x-1}\cdot dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}\cdot dx =$$

$$= 3\cdot \int \frac{1}{x-2}\cdot dx - 3\cdot \int \frac{1}{x-1}\cdot dx - 2\cdot \int (x-1)^{-2}\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$= 3\cdot \ln|x-2| - 3\cdot \ln|x-1| - 2\cdot \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= 3\cdot \ln|x-2| - 3\cdot \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C$$

Comprobación:

$$\left(3\cdot \ln|x-2| - 3\cdot \ln|x-1| + \frac{2}{x-1}\right)' = 3\cdot \frac{1}{x-2} - 3\cdot \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)^2-3(x-1)(x-2)-2(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2-2x+1)-3(x^2-3x+2)-2(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x+3-3x^2+9x-6-2x+4}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$$

[1] Ya que A=3 y C=-2.

[2] Las dos primeras integrales son casi inmediatas de tipo logaritmo y la última, casi inmediata de tipo potencial. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

**Ejercicio 4:** Calcula:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+tg^2 x}\cdot dx$$ (1,4 PUNTOS)

* * *

**Solución:**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+tg^2 x}\cdot dx \overset{1}{=} \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{\cos^3(\pi/2)}{3}\right) - \left(-\frac{\cos^3 0}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

* * *

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+tg^2 x}\cdot dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1/\cos^2 x}\cdot dx = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx =$$

$$= -\int \cos^2 x\cdot(-\operatorname{sen} x)\cdot dx \overset{2}{=} -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{3\cdot\cos^2 x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{3} = \cos^2 x\cdot \operatorname{sen} x$$

[1] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

[2] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\cos x=t$, $-\operatorname{sen} x\cdot dx=dt$. O por partes.

***Ejercicio 5:*** *Halla el valor del parámetro positivo k para que el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{kx}$ y $g(x)=x^2/k$ sea de 3 unidades cuadradas.* (1,4 PUNTOS)

* * *

**Solución:**

**1º)** Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\sqrt{kx} \\ y=x^2/k \end{cases} \Rightarrow \sqrt{kx}=x^2/k \Rightarrow kx=x^4/k^2 \Rightarrow k^3x=x^4 \Rightarrow x(x^3-k^3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=k \end{cases}$$

**2º)** Averiguamos entre 0 y k (k es positiva) qué función está por encima y qué función está por debajo:

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $k/2$ | $k/\sqrt{2}$ | $k/4$ |

**3º)** Calculamos el área:

$$A=\int_0^k\left(\sqrt{kx}-\frac{x^2}{k}\right)\cdot dx \overset{1}{=} \left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k}\cdot x^{3/2}-\frac{1}{3k}\cdot x^3\right]_0^k=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k}\cdot k^{3/2}-\frac{1}{3k}\cdot k^3\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k}\cdot 0-\frac{1}{3k}\cdot 0\right)=\frac{2}{3}\cdot k^2-\frac{1}{3}\cdot k^2=\frac{1}{3}\cdot k^2=3 \Rightarrow k^2=9 \overset{2}{\Rightarrow} k=3$$

* * *

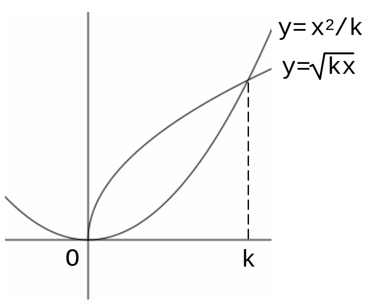
$$\int\left(\sqrt{kx}-\frac{x^2}{k}\right)\cdot dx=\int\sqrt{kx}\cdot dx-\int\frac{x^2}{k}\cdot dx \overset{2}{=} \sqrt{k}\cdot\int x^{1/2}\cdot dx-\frac{1}{k}\cdot\int x^2\cdot dx \overset{3}{=}$$

$$=\sqrt{k}\cdot\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}-\frac{1}{k}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k}\cdot x^{3/2}-\frac{1}{3k}\cdot x^3+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k}\cdot x^{3/2}-\frac{1}{3k}\cdot x^3\right)'=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}-\frac{1}{3k}\cdot 3x^2=\sqrt{kx}-\frac{x^2}{k}$$

Representación gráfica:




---

1 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
2 Ya que k es positiva.
3 Se trata de integrales inmediatas de tipo potencial.