1) (1,5p) Enuncia las propiedades de la integral definida.

2) (1,5p) Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

3) (1,4p) Calcula:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

4) (1,4p) Halla:

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x}$$

5) (1,4p) Calcula:

$$\int \frac{x-1}{x^3-3x^2} \cdot dx$$

6) (1,4p) Dada f', halla f(x) si f(3)=1/3:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

7) (1,4p) Calcula el área de la figura limitada por la curva de Agnesi, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, y la parábola $g(x)=x^2/2$.

Ejercicio 3: Calcula:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx \qquad \text{(1,4 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

Antes de aplicar el método de integración por partes hacemos el siguiente cambio de variable: $-x^2=t \Rightarrow -2x\cdot dx=dt \Rightarrow x\cdot dx=-dt/2$.

$$\int x^3\cdot e^{-x^2}\cdot dx=\int x^2\cdot e^{-x^2}\cdot x\cdot dx=\int -t\cdot e^t\cdot(-dt/2)=\frac{1}{2}\cdot\int t\cdot e^t\cdot dt \overset{1}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(t\cdot e^t-e^t)+C=\frac{1}{2}\cdot(t-1)\cdot e^t+C \overset{2}{=} \frac{1}{2}\cdot(-x^2-1)\cdot e^{-x^2}+C=-\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)\cdot e^{-x^2}+C$$

S	D	I
+	t	e^t
-	1	e^t
+	0	e^t

Comprobación:

$$\left[-\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)e^{-x^2}\right]'=-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot e^{-x^2}-\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=$$

$$=-x\cdot e^{-x^2}+x(x^2+1)\cdot e^{-x^2}=e^{-x^2}\cdot(-x+x^3+x)=x^3\cdot e^{-x^2}$$

1 Ahora aplicamos el método de integración por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo exponencial.

2 Deshacemos el cambio.

Ejercicio 4: *Halla:*

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x}$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x} \stackrel{1}{=} [-\cos \ln x]_1^e = (-\cos \ln e) - (-\cos \ln 1) = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1$$

* * *

$$\int \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x} \cdot dx = \int \operatorname{sen} \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \stackrel{2}{=} -\cos \ln x + C$$

Comprobación:

$$(-\cos \ln x)' = \operatorname{sen} \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x}$$

1 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

2 Es una integral casi inmediata de tipo coseno. También puede hacerse por el cambio de variable $\ln x = t$, $(1/x) \cdot dx = dt$.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int \frac{x-1}{x^3-3x^2}\cdot dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ doble} \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto:[1]

$$\frac{x-1}{x^3-3x^2}=\frac{x-1}{x^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^3(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1=Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow -1=-3B \Rightarrow B=1/3 \\ \text{Si } x=3 \Rightarrow 2=9C \Rightarrow C=2/9 \\ \text{Si } x=1 \overset{2}{\Rightarrow} 0=-2A-2/3+2/9 \Rightarrow A=-2/9 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x-1}{x^3-3x^2}\cdot dx=\int \frac{-2/9}{x}\cdot dx+\int \frac{1/3}{x^2}\cdot dx+\int \frac{2/9}{x-3}\cdot dx=$$

$$=-\frac{2}{9}\cdot\int \frac{1}{x}\cdot dx+\frac{1}{3}\cdot\int x^{-2}\cdot dx+\frac{2}{9}\cdot\int \frac{1}{x-3}\cdot dx \overset{3}{=}$$

$$=-\frac{2}{9}\cdot \ln|x|+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{2}{9}\cdot \ln|x-3|+C=-\frac{2}{9}\cdot \ln|x|-\frac{1}{3x}+\frac{2}{9}\cdot \ln|x-3|+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{2}{9}\cdot \ln|x|-\frac{1}{3x}+\frac{2}{9}\cdot \ln|x-3|\right)'=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x}-\frac{-3}{9x^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-3}=-\frac{2}{9x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{2}{9(x-3)}=$$

$$=\frac{-2x(x-3)+3(x-3)+2x^2}{9x^2(x-3)}=\frac{-2x^2+6x+3x-9+2x^2}{9x^2(x-3)}=\frac{9x-9}{9x^2(x-3)}=\frac{9(x-1)}{9x^2(x-3)}=\frac{x-1}{x^3-3x^2}$$

---

[1] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

[2] Ya que B=1/3 y C=2/9.

[3] La primera integral es inmediata de tipo logaritmo, la segunda, inmediata de tipo potencial y la tercera, casi inmediata de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 6: *Dada f', halla f(x) si f(3)=1/3:*

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función f es una primitiva de f':

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\cdot dx$$

Para eliminar la raíz hacemos el cambio de variable:

$$x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1 \Rightarrow dx=2t\cdot dt$$

Por tanto:

$$f(x)=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\cdot dt=2\cdot\int(t^2-1)\cdot dt \overset{1}{=}$$

$$=2\cdot\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{2}{3}\cdot t^3-2t+C \overset{2}{=} \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+1)^3}-2\cdot\sqrt{x+1}+C \overset{3}{=}$$

$$=\frac{2(x+1)\cdot\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}}{3}+C=\frac{\sqrt{x+1}\cdot(2x+2-6)}{3}+C=\frac{2(x-2)\cdot\sqrt{x+1}}{3}+C$$

Ahora bien:

$$f(3)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}+C=\frac{1}{3} \Rightarrow C=-1 \Rightarrow f(x)=\frac{2(x-2)\cdot\sqrt{x+1}}{3}-1=\frac{2(x-2)\cdot\sqrt{x+1}-3}{3}$$

1 Se trata de integrales inmediatas de tipo potencial.
2 Deshacemos el cambio.
3 Ya que x+1>0.

Ejercicio 7: *Calcula el área de la figura limitada por la curva de Agnesi, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, y la parábola $g(x)=x^2/2$.* *(1,4 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=1/(1+x^2) \\ y=x^2/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4+x^2=2 \Rightarrow x^4+x^2-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=-2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	1	0

3º) Calculamos el área:[1]

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\cdot dx \overset{2}{=} \left[\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\operatorname{arc\,tg} 1-\frac{1}{6}\right)-\left[\operatorname{arc\,tg}(-1)+\frac{1}{6}\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\pi-2}{6}$$

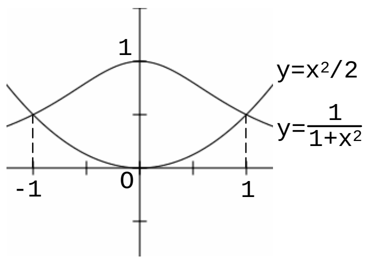
* * *

$$\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\cdot dx=\int\frac{1}{1+x^2}\cdot dx-\frac{1}{2}\cdot\int x^2\cdot dx \overset{3}{=} \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x^3}{6}+C$$

Comprobación:

$$\left(\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x^3}{6}\right)'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{3x^2}{6}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}$$

Representación gráfica:



[1] Si se repara en la simetría respecto del eje OY, puede reducirse el cálculo entre 0 y 1, multiplicando luego el resultado por 2.
[2] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
[3] La primera integral es inmediata de tipo arco tangente y la segunda, inmediata de tipo potencial.