

30 de enero de 2009.

1) (1,5p) Define los siguientes conceptos:

a) Función integral de una función.

b) Primitiva de una función.

c) Integral indefinida de una función.

2) (1,5p) Enuncia y demuestra la regla de Barrow.

3) (1,4p) Halla $f(x)$ si su gráfica pasa por el punto $P(0,1)$ y su derivada es $f'(x)=3 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x$.

4) (1,4p) Halla:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$$

5) (1,4p) Calcula:

$$\int \frac{1}{x^2 - x^3} \cdot dx$$

6) (1,4p) Halla:

$$\int \sqrt{e^x - 1} \cdot dx$$

7) (1,4p) Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$.

Ejercicio 3: Halla $f(x)$ si su gráfica pasa por el punto $P(0,1)$ y su derivada es $f'(x)=3 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x$.

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función f es una primitiva de f' :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) \cdot dx = \int 3 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \\ &= -3 \cdot \int \cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x) \cdot dx \stackrel{1}{=} -3 \cdot \frac{\cos^3 x}{3} + C = -\cos^3 x + C \end{aligned}$$

Como el punto P pertenece a la gráfica de f :

$$f(0)=1 \Rightarrow -\cos^3 0 + C = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = 2 - \cos^3 x$$

¹ Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x \cdot dx = dt$. O por partes.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx \stackrel{1}{=} \left[-\frac{1+2 \cdot \ln x}{4x^2} \right]_1^2 = -\frac{1+2 \cdot \ln 2}{16} + \frac{1+2 \cdot \ln 1}{4} = \frac{-1-\ln 4+4}{16} = \frac{3-\ln 4}{16}$$

* * *

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} \cdot dx &= \int x^{-3} \cdot \ln x \cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \cdot \int x^{-3} \cdot dx \stackrel{3}{=} \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \\ &= \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = \frac{-1-2 \cdot \ln x}{4x^2} + C = -\frac{1+2 \cdot \ln x}{4x^2} + C \end{aligned}$$

S	D	I
+	$\ln x$	x^{-3}
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{-1}{2x^2}$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1+2 \cdot \ln x}{4x^2} \right)' = -\frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot 4x^2 - (1+2 \cdot \ln x) \cdot 8x}{16x^4} = -\frac{8x-8x-16x \cdot \ln x}{16x^4} = \frac{16x \cdot \ln x}{16x^4} = \frac{\ln x}{x^3}$$

¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

³ Se trata de una integral inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int \frac{1}{x^2-x^3} \cdot dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ doble} \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto:¹

$$\frac{1}{x^2-x^3} = \frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} = \frac{Ax(1-x)+B(1-x)+Cx^2}{x^2(1-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=Ax(1-x)+B(1-x)+Cx^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=0 \Rightarrow 1=B \\ \text{si } x=1 \Rightarrow 1=C \\ \text{si } x=-1 \Rightarrow 1=-2A+2B+C \xrightarrow{2} 2A=-1+2+1 \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-x^3} \cdot dx &= \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{1}{x^2} \cdot dx + \int \frac{1}{1-x} \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int x^{-2} \cdot dx - \int \frac{1}{x-1} \cdot dx \stackrel{3}{=} \\ &= \ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \ln|x-1| + C = -\frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|x-1| \right)' &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \\ &= \frac{1-x+x(1-x)+x^2}{x^2(1-x)} = \frac{1-x+x-x^2+x^2}{x^2-x^3} = \frac{1}{x^2-x^3} \end{aligned}$$

¹ Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

² Ya que B=1 y C=1.

³ La primera integral es inmediata de tipo logaritmo, la segunda, inmediata de tipo potencia y la tercera, casi inmediata de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 6: Halla:

$$\int \sqrt{e^x - 1} \cdot dx$$

* * *

(1,4 PUNTOS)

Solución:

Para eliminar la raíz, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$e^x - 1 = t^2 \Rightarrow e^x \cdot dx = 2t \cdot dt \Rightarrow dx = \frac{2t \cdot dt}{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 1} \cdot dx &= \int t \cdot \frac{2t \cdot dt}{t^2 + 1} = 2 \cdot \int \frac{t^2}{t^2 + 1} \cdot dt \stackrel{1}{=} 2 \cdot \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} \cdot dt = 2 \cdot \int \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) \cdot dt = \\ &= 2 \cdot \int 1 \cdot dt - 2 \cdot \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot dt \stackrel{2}{=} 2t - 2 \cdot \arctg t + C \stackrel{3}{=} 2 \cdot \sqrt{e^x - 1} - 2 \cdot \arctg \sqrt{e^x - 1} + C \end{aligned}$$

¹ Sumamos y restamos 1 al numerador. Se obtiene el mismo resultado haciendo la división de t^2 entre $t^2 + 1$.

² La primera integral es inmediata de tipo potencial y la segunda, inmediata de tipo arco tangente.

³ Deshacemos el cambio.

Ejercicio 7: Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$.

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x \cdot (x^3-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3=1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

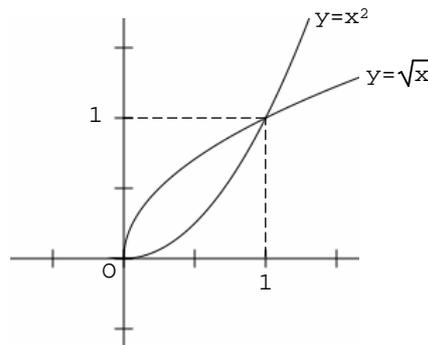
2º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	Y ₁	Y ₂
1/2	1/4=0,25	$\sqrt{1/2} \approx 0,7$

3º) Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2) \cdot dx = \int_0^1 (x^{1/2}-x^2) \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= \left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{2 \cdot x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - 0 = 1/3 \end{aligned}$$

Representación gráfica:



¹ Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.