

1) (1p) Define:

a) Primitiva de una función.

b) Integral indefinida de una función.

2) (1p) Enuncia:

a) El teorema del valor medio del cálculo integral.

b) La regla de Barrow.

3) (1p) Demuestra:

a) $\int (f+g) = \int f + \int g$.

b) $\int (k \cdot f) = k \cdot \int f$.

4) (1,4p) Encuentra la función $f(x)$ si su gráfica pasa por el punto $P(\pi/4, \pi)$ y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}$$

5) (1,4p) Halla:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

6) (1,4p) Calcula:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

7) (1,4p) Halla:

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2} \cdot dx$$

8) (1,4p) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y=\sqrt{x+4}$ y los ejes coordenados.

Ejercicio 4: Encuentra la función $f(x)$ si su gráfica pasa por el punto $P(\pi/4, \pi)$ y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{\underset{*}{\text{tg } x} \cdot \underset{*}{\cos^2 x}} \quad (1,4 \text{ PUNTOS})$$

Solución:

Como la función f es una primitiva de f' :

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \frac{1}{\text{tg } x \cdot \cos^2 x} \cdot dx \stackrel{1}{=} \int \frac{1/\cos^2 x}{\text{tg } x} \cdot dx \stackrel{2}{=} \ln |\text{tg } x| + C$$

Como el punto $P(\pi/4, \pi)$ pertenece a la gráfica de f :

$$f(\pi/4) = \pi \Rightarrow \ln \left| \text{tg } \frac{\pi}{4} \right| + C = \pi \Rightarrow \ln 1 + C = \pi \Rightarrow 0 + C = \pi \Rightarrow C = \pi \Rightarrow f(x) = \ln |\text{tg } x| + \pi$$

¹ Dividimos numerador y denominador por $\cos^2 x$.

² Se trata de una integral casi inmediata de tipo logaritmo. Se puede hacer también por el cambio de variable $\text{tg } x = t$, $(1/\cos^2 x) \cdot dx = dt$.

Ejercicio 5: Halla:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

* * *

(1,4 Puntos)

Solución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} \stackrel{1}{=} \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 \cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{1}{3} \cdot \arcsen(3x) + C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \arcsen(3x) \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$$

¹ Multiplicamos y dividimos por 3.

² Se trata de una integral casi inmediata de tipo arco seno. También puede hacerse con el cambio de variable $3x=t$, $3 \cdot dx=dt$.

Ejercicio 6: Calcula:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

* * *

(1,4 PUNTOS)

Solución:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot dx \stackrel{1}{=} [2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 4 \cdot \sqrt{x}]_1^e = (2 \cdot \sqrt{e} \cdot 1 - 4 \cdot \sqrt{e}) - (2 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = 4 - 2 \cdot \sqrt{e}$$

* * *

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int x^{-1/2} \cdot \ln x \cdot dx \stackrel{2}{=} 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 2 \cdot \int x^{-1/2} \cdot dx \stackrel{3}{=}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 2 \cdot \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 4 \cdot \sqrt{x} + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	$x^{-1/2}$
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2 \cdot \sqrt{x}$

Comprobación:

$$(2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 4 \cdot \sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \ln x + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

³ Esta integral es inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 7: Halla:

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2} \cdot dx$$

* * *

(1,4 PUNTOS)

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{doble} \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto:¹

$$\frac{x+1}{x^3-x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2+Bx(x-1)+C(x-1)}{x^2(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=Ax^2+Bx(x-1)+C(x-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=0 \Rightarrow 1=-C \Rightarrow C=-1 \\ \text{si } x=1 \Rightarrow 2=A \\ \text{si } x=2 \Rightarrow 3=4A+2B+C \xrightarrow{2} 3=8+2B-1 \Rightarrow B=-2 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3-x^2} \cdot dx &= \int \frac{2}{x-1} \cdot dx + \int \frac{-2}{x} \cdot dx + \int \frac{-1}{x^2} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx - \int x^{-2} \cdot dx \stackrel{3}{=} \\ &= 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x| + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x| + \frac{1}{x} \right)' &= 2 \cdot \frac{1}{x-1} - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x(x-1) - (x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{x+1}{x^3-x^2} \end{aligned}$$

¹ Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

² Ya que A=2 y C=-1.

³ La primera integral es casi inmediata de tipo logaritmo, la segunda, inmediata de tipo logaritmo y la tercera, inmediata de tipo potencial. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 8: Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y=\sqrt{x+4}$ y los ejes coordenados.

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x+4} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+4}=0 \Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

2º) Averiguamos entre -4 y 0 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y ₁	y ₂
-3	1	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-4}^0 (\sqrt{x+4}-0) \cdot dx = \int_{-4}^0 \sqrt{x+4} \cdot dx \stackrel{1}{=} \left[\frac{2}{3} \cdot (x+4)^{3/2} \right]_{-4}^0 = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$$

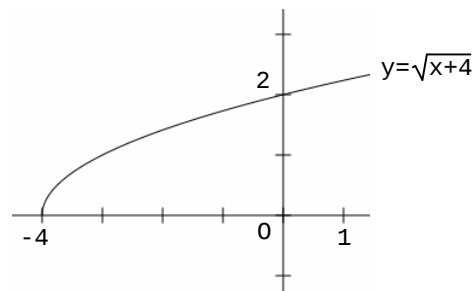
* * *

$$\int \sqrt{x+4} \cdot dx = \int (x+4)^{1/2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{(x+4)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{2}{3} \cdot (x+4)^{3/2} + C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot (x+4)^{3/2} \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (x+4)^{1/2} = \sqrt{x+4}$$

Representación gráfica:



¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $x+4=t^2$, $dx=2t \cdot dt$.