25 de enero de 2011.

1) (1p) Define:

a) Primitiva de una función.

b) Integral indefinida de una función.

2) (1p) Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

3) (1p) Enuncia y demuestra la regla de Barrow.

4) (2,6p) Halla:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot dx \qquad \int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

5) (2,6p) Calcula:

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+17} \cdot dx \qquad \int \frac{x+1}{x^2-8x+15} \cdot dx$$

6) (1,8p) Halla el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x)=(x^2-1)/e^x$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int x\cdot \operatorname{sen} x^2\cdot dx \qquad\qquad \int x^2\cdot \operatorname{sen} x\cdot dx$$

(2,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\int x\cdot \operatorname{sen} x^2\cdot dx \overset{1}{=} \frac{1}{2}\cdot\int \operatorname{sen} x^2\cdot(2x)\cdot dx \overset{2}{=} -\frac{1}{2}\cdot\cos x^2+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos x^2\right)' = -\frac{1}{2}\cdot(-\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x = x\cdot \operatorname{sen} x^2$$

b)

$$\int x^2\cdot \operatorname{sen} x\cdot dx \overset{3}{=} -x^2\cdot\cos x+2x\cdot \operatorname{sen} x+2\cdot\cos x+C=2x\cdot \operatorname{sen} x+(2-x^2)\cdot\cos x+C$$

S	D	I
+	x^2	$\operatorname{sen} x$
-	$2x$	$-\cos x$
+	2	$-\operatorname{sen} x$
-	0	$\cos x$

Comprobación:

$$[2x\cdot \operatorname{sen} x+(2-x^2)\cdot\cos x]'=$$

$$=2\cdot \operatorname{sen} x+2x\cdot\cos x-2x\cdot\cos x-(2-x^2)\cdot \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x\cdot(2-2+x^2)=x^2\cdot \operatorname{sen} x$$

1 Multiplicamos y dividimos por 2.

2 Se trata de una integral casi inmediata de tipo coseno. Se puede hacer también por el cambio de variable $x^2=t$, $2x\cdot dx=dt$.

3 Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo seno y coseno.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+17}\cdot dx \qquad\qquad \int \frac{x+1}{x^2-8x+15}\cdot dx$$

(2,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Como se trata de una integral racional (cociente de polinomios), calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-8x+17=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-68}}{2} \Rightarrow \text{No tiene raíces reales}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+17}\cdot dx \overset{1}{=} \int \frac{x+1}{(x-4)^2+1^2}\cdot dx \overset{2}{=} \int \frac{4+t+1}{t^2+1}\cdot dt = \int \frac{5+t}{1+t^2}\cdot dt =$$

$$= \int\left(\frac{5}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^2}\right)\cdot dt = \int \frac{5}{1+t^2}\cdot dt + \int \frac{t}{1+t^2}\cdot dt = 5\cdot\int\frac{1}{1+t^2}\cdot dt + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2t}{1+t^2}\cdot dt \overset{3}{=}$$

$$=5\cdot \operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{2}\cdot \ln(1+t^2)+C \overset{4}{=} 5\cdot\operatorname{arc\,tg}(x-4)+\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2-8x+17)+C=$$

Comprobación:

$$\left(5\cdot\operatorname{arc\,tg}(x-4)+\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2-8x+17)\right)' = 5\cdot\frac{1}{1+(x-4)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-8}{x^2-8x+17}=$$

$$=\frac{5}{x^2-8x+17}+\frac{x-4}{x^2-8x+17}=\frac{x+1}{x^2-8x+17}$$

b) Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-8x+15=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto:[5]

$$\frac{x+1}{x^2-8x+15}=\frac{x+1}{(x-5)(x-3)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-5)}{(x-5)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=A(x-3)+B(x-5) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=3 \Rightarrow 4=-2B \Rightarrow B=-2 \\ \text{Si } x=5 \Rightarrow 6=2A \Rightarrow A=3 \end{cases}$$

En consecuencia:

---

[1] Como el polinomio $x^2-8x+17$ no tiene raíces reales, lo escribimos como una suma de cuadrados: $x^2-8x+17=(x-4)^2-16+17=(x-4)^2+1^2$.

[2] Hacemos el cambio $x-4=t \Rightarrow x=4+t$, $dx=dt$.

[3] La primera integral es inmediata de tipo arco tangente y la segunda, casi inmediata de tipo logaritmo. Esta última puede hacerse también con el cambio $1+t^2=z$, $2t\cdot dt=dz$.

[4] Deshacemos el cambio.

[5] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+15} \cdot dx = \int \frac{3}{x-5} \cdot dx + \int \frac{-2}{x-3} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x-5} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x-3} \cdot dx \overset{1}{=}$$

$$= 3 \cdot \ln|x-5| - 2 \cdot \ln|x-3| + C$$

Comprobación:

$$(3 \cdot \ln|x-5| - 2 \cdot \ln|x-3|)' = 3 \cdot \frac{1}{x-5} - 2 \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x-3} =$$

$$= \frac{3(x-3)-2(x-5)}{x^2-8x+15} = \frac{3x-9-2x+10}{x^2-8x+15} = \frac{x+1}{x^2-8x+15}$$

[1] Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos

Ejercicio 6: *Halla el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función f(x)=(x²-1)/eˣ y el eje de abscisas.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=(x^2-1)/e^x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-1}{e^x}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	-1	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(0-\frac{x^2-1}{e^x}\right)\cdot dx=\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{e^x}\stackrel{1}{=}\left[\frac{(x+1)^2}{e^x}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{e}-0=\frac{4}{e}$$

* * *

$$\int\frac{1-x^2}{e^x}\cdot dx=\int(1-x^2)\cdot e^{-x}\cdot dx\stackrel{2}{=}-(1-x^2)\cdot e^{-x}+2x\cdot e^{-x}+2\cdot e^{-x}+C=$$

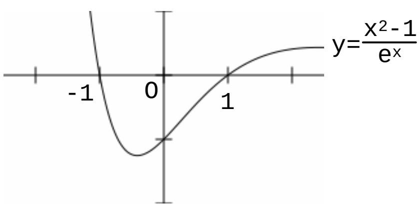
$$=e^{-x}\cdot(-1+x^2+2x+2)+C=(x^2+2x+1)\cdot e^{-x}+C=(x+1)^2\cdot e^{-x}+C=\frac{(x+1)^2}{e^x}+C$$

S	D	I
+	$1-x^2$	e^{-x}
-	$-2x$	$-e^{-x}$
+	-2	e^{-x}
-	0	$-e^{-x}$

Comprobación:

$$\left(\frac{(x+1)^2}{e^x}\right)'=\frac{2(x+1)\cdot e^x-(x+1)^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(2x+2-x^2-2x-1)}{e^{2x}}=\frac{1-x^2}{e^x}$$

Representación gráfica:



[1] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

[2] Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo exponencial.