2 de noviembre de 2000.

1) (4p) Define los siguientes conceptos:

a) Asíntota horizontal.

b) Límite de una función en un punto.

c) Función continua en un punto.

d) Elipse.[1]

2) (2p) Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{2-x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{-1/x^3}$$

3) (1p) Estudia las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}$$

4) (1p) Halla k para que sea continua la función:

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{si } x\le 1\\ e^{x-k} & \text{si } x>1\end{cases}$$

5) (1p) Encuentra, con un error menor que una centésima, la solución de la ecuación $e^x=1/x$.

6) (1p) Halla la ecuación reducida de la elipse de eje focal el de ordenadas si se sabe que su excentricidad es 3/5 y que b=2.[1]

[1] La elipse formaba parte del programa de Matemáticas II en este curso.

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{2-x} \qquad \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{-1/x^3} \qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{2-x} \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{\ln(x-2)}{2-x} \stackrel{2}{=} \frac{\ln 0^+}{0^-}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{-1/x^3} \stackrel{3}{=} e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{x^3}\cdot(1+\operatorname{sen} x-1)\right]}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{x^3}} \stackrel{4}{=}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}}=e^{-1/0^+}=e^{-\infty}=0$$

---

1 Ya que el dominio de la función es $(2,+\infty)$.
2 Para calcular el límite del numerador aplicamos la regla del límite de la composición.
3 Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞.
4 Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 3: *Estudia las asíntotas de la función:*

$$f(x)=\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

2º) La función no tiene asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}\overset{1}{=}\lim_{x\to3}\frac{16-x^2-7}{(x-3)(4+\sqrt{x^2+7})}=\lim_{x\to3}\frac{9-x^2}{(x-3)(4+\sqrt{x^2+7})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-(x^2-9)}{(x-3)(4+\sqrt{x^2+7})}=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)(x+3)}{(x-3)(4+\sqrt{x^2+7})}=\lim_{x\to3}\frac{-(x+3)}{4+\sqrt{x^2+7}}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$$

3º) Las rectas $y=1$ e $y=-1$ son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{-x-3}\overset{3}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}-\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}{-1-\frac{3}{x}}=\frac{0-\sqrt{1+0}}{-1-0}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}\overset{3}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}-\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0-\sqrt{1+0}}{1-0}=\frac{-1}{1}=-1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}-1=\frac{4-\sqrt{x^2+7}-x+3}{x-3}=\frac{7-x-\sqrt{x^2+7}}{x-3}\overset{4}{=}\frac{\sqrt{x^2-14x+49}-\sqrt{x^2+7}}{x-3}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo,[5] la función se encuentra situada por debajo de la asíntota $y=1$.

$$f(x)-y=\frac{4-\sqrt{x^2+7}}{x-3}+1=\frac{4-\sqrt{x^2+7}+x-3}{x-3}=\frac{x+1-\sqrt{x^2+7}}{x-3}\overset{6}{=}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+7}}{x-3}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,[7] la función se encuentra situada por encima de la asíntota $y=-1$.

[1] Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador.

[2] Ya que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

[3] Dividimos numerador y denominador por x (o, si se prefiere, sacamos x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación).

[4] Ya que, en $-\infty$, como $7-x>0$, $7-x=|7-x|=\sqrt{(7-x)^2}$.

[5] Si $x<0$, $-14x+49>7$.

[6] Ya que, en $+\infty$, como $x+1>0$, $x+1=|x+1|=\sqrt{(x+1)^2}$.

[7] Si $x>3$, $2x+1>7$.

Ejercicio 4: *Halla k para que sea continua la función:*

$$f(x)=\begin{cases} |x| & si\ x\leq 1 \\ e^{x-k} & si\ x>1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Para que la función sea continua es necesario que lo sea en x=1:

- $f(1)=|1|=1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} |x| = |1|=1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} e^{x-k} = e^{1-k}$

Por tanto:

$$e^{1-k}=1 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1$$

Ejercicio 5: *Encuentra, con un error menor que una centésima, la solución de la ecuación $e^x=1/x$.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=e^x-1/x$.

La función es continua en su dominio, ya que si $a\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [e^x-1/x] = e^a-1/a = f(a)$$

Como $f(0,5)=\sqrt{e}-2\simeq-0,35<0$ y $f(1)=e-1\simeq1,72>0$, estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una centésima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	0,5	1	0,6	0,55	0,56	0,57
y	-	+	+	-	-	+

Como f es continua en [0,56;0,57] y $f(0,56)\cdot f(0,57)<0$, por el teorema de Bolzano existe c en (0,56;0,57) tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow e^c-1/c=0 \Rightarrow e^c=1/c$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como c pertenece al intervalo (0,56;0,57), una solución aproximada con un error menor que una centésima es, por ejemplo, 0,56.

Ejercicio 6: *Halla la ecuación reducida de la elipse de eje focal el de ordenadas si se sabe que su excentricidad es 3/5 y que b=2.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

La ecuación reducida de una elipse de eje focal el eje de ordenadas es:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Como b=2, queda:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{4}=1$$

Como e=3/5 y $a^2=b^2+c^2$:

$$\begin{cases} c/a=3/5 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3a/5 \\ a^2=4+c^2 \end{cases} \Rightarrow a^2=4+\frac{9a^2}{25} \Rightarrow 25a^2=100+9a^2 \Rightarrow 16a^2=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{100}{16} \Rightarrow a=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow c=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25/4}+\frac{x^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{4y^2}{25}+\frac{x^2}{4}=1$$