25 de octubre de 2001.

1) (4p) Define los siguientes conceptos:

a) Límite de una función en $+\infty$.

b) Asíntota vertical.

c) Función continua en un punto.

d) Infinitésimo.

2) (2p) Calcula:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^{\ln x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)^{x}$$

3) (2p) Estudia las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{2+2^x}{1-2^x}$$

4) (2p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2-x} & \text{si } x<2\\[2mm] \dfrac{3x-10}{(x-3)^2} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^{\ln x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)^x$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^{\ln x} \overset{1}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\operatorname{sen} x)^{\ln x} = 0^{-\infty} = +\infty$$

b) Calculamos primero el límite de la base:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{sen} x\right)=1-0=1$$

Ya que el último paréntesis es el producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $-1\leq\operatorname{sen} x\leq 1$

Como la base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2}-1\right)\right]} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{x^2-\operatorname{sen} x-x^2}{x^2}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-\operatorname{sen} x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\cdot\operatorname{sen} x\right)} = e^0 = 1$$

Ya que el último paréntesis es el producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{+\infty}=0$
- $-1\leq\operatorname{sen} x\leq 1$

---

[1] El dominio de esta función está formado por los números positivos (el argumento del logaritmo debe ser positivo) para los que el seno es positivo (la base de las funciones potencial-exponenciales debe ser positiva).

[2] Por las propiedades de los límites.

Ejercicio 3: *Estudia las asíntotas de la función:*

$$f(x)=\frac{2+2^x}{1-2^x}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$1-2^x\neq 0 \Rightarrow 2^x\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$$

2º) La recta $x=0$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{2+2^x}{1-2^x}=\frac{2+1}{1-1^-}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2+2^x}{1-2^x}=\frac{2+1}{1-1^+}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

3º) Las rectas $y=2$ e $y=-1$ son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+2^x}{1-2^x}=\frac{2+2^{-\infty}}{1-2^{-\infty}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2^x}{1-2^x}\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}-1}=\frac{\frac{2}{2^{+\infty}}+1}{\frac{1}{2^{+\infty}}-1}=\frac{\frac{2}{+\infty}+1}{\frac{1}{+\infty}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{2+2^x}{1-2^x}-2=\frac{2+2^x-2+2\cdot 2^x}{1-2^x}=\frac{3\cdot 2^x}{1-2^x}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $-\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,[2] la función se encuentra situada por encima de la asíntota $y=2$.

$$f(x)-y=\frac{2+2^x}{1-2^x}+1=\frac{2+2^x+1-2^x}{1-2^x}=\frac{3}{1-2^x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el denominador es negativo,[3] la función se encuentra situada por debajo de la asíntota $y=-1$.

---

[1] Como sale la expresión indeterminada ∞/∞, dividimos numerador y denominador por 2^x (o, si se prefiere, sacamos 2^x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación).

[2] Si $x<0$, $0<2^x<1$.

[3] Si $x>0$, $2^x>1$.

Ejercicio 4: *Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x} & \text{si } x<2 \\ \dfrac{3x-10}{(x-3)^2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$:

$$x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$$

2º) La función es continua en su dominio:

- Si $a<2$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-4}{2-x}=\dfrac{a^2-4}{2-a}=f(a)$

- Si $2<a\neq 3$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x-10}{(x-3)^2}=\dfrac{3a-10}{(a-3)^2}=f(a)$

- Si $a=2$:

$$f(2)=\frac{6-10}{(2-3)^2}=-4$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2-4}{2-x}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}[-(x+2)]=-4$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{3x-10}{(x-3)^2}=\frac{6-10}{(2-3)^2}=-4$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto infinito en x=3:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3x-10}{(x-3)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$