18 de octubre de 2002.

1) (4p) Define los siguientes conceptos:

a) Límite de una sucesión.

b) Límite lateral izquierdo de una función en un punto.

c) Asíntota horizontal.

d) Asíntota oblicua.

e) Función continua en un punto.

2) (2,4p) Calcula:

$$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to -\infty}(e^x\cdot\operatorname{sen} x)$$

3) (2,4p) Halla las asíntotas de la función:

$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$$

4) (1,2p) Estudia la continuidad en x=0 de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2}/x & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to -\infty}(e^x\cdot \operatorname{sen} x)$$ (2,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36} \overset{1}{=} \lim_{x\to 6}\frac{4-(x-2)}{(x^2-36)(2+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to 6}\frac{6-x}{(x^2-36)(2+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{-(x-6)}{(x-6)(x+6)(2+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to 6}\frac{-1}{(x+6)(2+\sqrt{x-2})} = \frac{-1}{12\cdot 4} = -\frac{1}{48}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\operatorname{sen} x} \overset{2}{=} e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot(1+x-1)\right]} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \overset{3}{=} e^1 = e$$

c)

$$\lim_{x\to -\infty}(e^x\cdot \operatorname{sen} x) = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$
- $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$

[1] Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador. También puede hacerse con el cambio de variable $x-2=t^2$.

[2] Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞.

[3] Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 3: Estudia las asíntotas de la función:

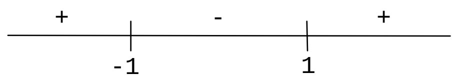
$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$$

(2,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(-∞,-1)∪(1,+∞), ya que el signo del argumento del logaritmo es el siguiente:



2º) La recta x=-1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \ln\frac{x+1}{x-1}\stackrel{1}{=}\ln\frac{0^-}{-2}=\ln 0^+=-\infty$$

3º) La recta x=1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln\frac{x+1}{x-1}\stackrel{1}{=}\ln\frac{2}{0^+}=\ln(+\infty)=+\infty$$

4º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en -∞ y +∞:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}\stackrel{1}{=}\ln\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}\stackrel{2}{=}\ln\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=\ln\lim_{x\to\pm\infty}1=\ln 1=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\ln\frac{x+1}{x-1}-0=\ln\frac{x+1}{x-1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en -∞, ya que para valores menores que -1 el argumento del logaritmo es menor que 1, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota; y como la diferencia es positiva en +∞, ya que para valores mayores que 1 el argumento del logaritmo es mayor que 1, la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

---

1 Aplicamos la regla del límite de la composición.

2 Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n \sim a_n\cdot x^n$ en +∞ y en -∞. También puede hacerse sacando x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 4: *Estudia la continuidad en x=0 de la función:*

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2}/x & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

La función tiene una discontinuidad de salto finito en x=0 (aunque es continua por la derecha en dicho punto):

- $f(0)=1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x+\frac{|x|}{x}\right) \overset{1}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x+\frac{-x}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x-1) = -1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+\frac{|x|}{x}\right) \overset{2}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+\frac{x}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+1) = 1$

[1] Ya que x<0.

[2] Ya que x>0.