1) (2p) Define los siguientes conceptos:

a) Límite de una función en un punto.

b) Función continua en un punto.

2) (1p) Enuncia el teorema de Bolzano.

3) (2p) Halla los límites en 0 y en $+\infty$ de la siguiente función:

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln x$$

4) (1p) Demuestra que la ecuación $x+\cos x=2$ tiene una solución en el intervalo $(2,3)$ y calcúlala con un error menor que media décima.

5) (1p) Halla a y b para que la siguiente función sea continua en $x=-1$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+4ax+10}{x^2-1} & \text{si } x\neq -1 \\ b & \text{si } x=-1 \end{cases}$$

6) (2p) Calcula las asíntotas de la función $f(x)=\operatorname{sen} x/\ln x$.

7) (1p) Halla k para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+kx+1}+x\right)=2$$

Ejercicio 3: *Halla los límites en 0 y en $+\infty$ de la siguiente función:*

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln x$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{1}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} [\ln(1+x)-\ln x] \overset{2}{=} \ln 1-\ln 0^{+}=0-(-\infty)=+\infty$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}[\ln(1+x)-\ln x] \overset{3}{=} \lim_{x\to +\infty} \ln\frac{1+x}{x} \overset{4}{=} \ln \lim_{x\to +\infty}\frac{1+x}{x} \overset{5}{=}$$

$$=\ln \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x}=\ln \lim_{x\to +\infty} 1=\ln 1=0$$

---

1 Ya que $Dom(f)=(0,+\infty)$.

2 Para calcular el límite del minuendo aplicamos la regla del límite de la composición.

3 Por las propiedades de los logaritmos.

4 Aplicamos la regla del límite de la composición.

5 Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n \sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 4: *Demuestra que la ecuación $x+\cos x=2$ tiene una solución en el intervalo (2,3) y calcúlala con un error menor que media décima.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=x+\cos x-2$.

Esta función es continua en R, ya que si $a\in R$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [x+\cos x-2] = a+\cos a-2 = f(a)$$

Como $f(2)=\cos 2<0$ y $f(3)=1-\cos 3>0$,[1] estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una décima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	2	3	2,5	2,8	2,9
y	-	+	-	-	-

Como f es continua en [2,9;3] y $f(2,9)\cdot f(3)<0$, por el teorema de Bolzano existe c en (2,9;3) tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow c+\cos c-2=0 \Rightarrow c+\cos c=2$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como $c\in(2,9;3)$, una solución aproximada con un error menor que 0,05 es, evidentemente, 2,95.

[1] Como el ángulo de las funciones trigonométricas viene dado en radianes, hay que calcular estos valores con la calculadora puesta en esa unidad.

Ejercicio 5: *Halla a y b para que la siguiente función sea continua en x=-1:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+4ax+10}{x^2-1} & si\ x\neq -1 \\ b & si\ x=-1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

El límite de la función f en -1 debe coincidir con f(-1):

- $f(-1)=b$
- $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2+4ax+10}{x^2-1} = \dfrac{2-4a+10}{0} \overset{1}{\Rightarrow} 2-4a+10=0 \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2+12x+10}{x^2-1} \overset{2}{=} \lim_{x\to -1} \dfrac{2(x+1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \dfrac{2(x+5)}{x-1} = \dfrac{8}{-2} = -4$

Por tanto, a=3 y b=-4.

[1] Si $2-4a+10\neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es continua en x=-1.

[2] Factorizamos numerador y denominador.

Ejercicio 6: *Calcula las asíntotas de la función $f(x)=\operatorname{sen}x/\ln x$.*

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\mathrm{Dom}(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

2º) La recta x=0 no es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{sen}x}{\ln x}=\frac{\operatorname{sen}0}{\ln 0^+}=\frac{0}{-\infty}=0$$

3º) La recta x=1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\operatorname{sen}x}{\ln x}=\frac{\operatorname{sen}1}{\ln 1^-}=\frac{\operatorname{sen}1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\operatorname{sen}x}{\ln x}=\frac{\operatorname{sen}1}{\ln 1^+}=\frac{\operatorname{sen}1}{0^+}=+\infty$$

4º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot\operatorname{sen}x\right)=0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $-1\leq\operatorname{sen}x\leq 1$

Ejercicio 7: *Halla k para que se verifique la siguiente igualdad:*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+kx+1}+x\right)=2$$ *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+kx+1}+x\right)\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-kx+1}-x\right)\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-kx+1-x^2}{\sqrt{x^2-kx+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-kx+1}{\sqrt{x^2-kx+1}+x}\overset{3}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(-k+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-k+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=$$

$$=\frac{-k+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=\frac{-k}{2}=2\ \Rightarrow\ k=-4$$

---

[1] Ya que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

[2] Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

[3] Sacamos x factor común en numerador y denominador. También puede hacerse dividiendo directamente numerador y denominador por x.