1) (1p) Define:

a) Límite de una función en $+\infty$.

b) Infinitésimo.

2) (1p) Define asíntota oblicua en $+\infty$ y demuestra la fórmula que permite calcular su pendiente.

3) (1p) Enuncia el teorema de Bolzano.

4) (3p) Halla los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-2x}-2x}{1+3x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi-2x-x^3}{x^3+2}$$

5) (2p) La función f tiene una discontinuidad en x=0. Clasifícala según sea el valor de a:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2}{\cos x-1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

6) (1p) Estudia el comportamiento en $+\infty$ de la función:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$$

7) (1p) Encuentra la aproximación por defecto con dos cifras decimales de la solución de la ecuación $1-2x-\operatorname{sen} x=0$. Acota el error cometido.

Ejercicio 4: *Halla los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2-2x}-2x}{1+3x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sen(1/x)}{sen\,x}\qquad \lim_{x\to-\infty} arc\,tg\frac{\pi-2x-x^3}{x^3+2}$$ (3 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2-2x}-2x}{1+3x}\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+2x}+2x}{1-3x}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\sqrt{9+\frac{2}{x}}+2\right)}{x\cdot\left(\frac{1}{x}-3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+2}{\frac{1}{x}-3}=\frac{\sqrt{9+0}+2}{0-3}=-\frac{5}{3}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sen(1/x)}{sen\,x}\overset{3}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sen(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}[x\cdot sen(1/x)]=0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to 0} x=0$
- $-1\le sen(1/x)\le 1$

c)

$$\lim_{x\to-\infty} arc\,tg\frac{\pi-2x-x^3}{x^3+2}\overset{4}{=}arc\,tg\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi-2x-x^3}{x^3+2}\overset{5}{=}arc\,tg\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^3}=$$

$$=arc\,tg\lim_{x\to-\infty}(-1)=arc\,tg(-1)=-\pi/4$$

---

1 Ya que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

2 Sacamos x factor común en numerador y denominador. También puede hacerse dividiendo directamente numerador y denominador por x.

3 Ya que, en $x=0$, $sen\,x\sim x$.

4 Aplicamos la regla del límite de la composición.

5 Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando x^3 factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 5: *La función f tiene una discontinuidad en x=0. Clasifícala según sea el valor de a:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2}{\cos x-1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función se comporta de distinto modo a izquierda y derecha de x=0, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \overset{1}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{ax}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} a = a$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{\cos x-1} \overset{2}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-x^2}{1-\cos x} \overset{3}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-x^2}{x^2/2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-2) = -2$$

Por tanto, si a=-2, la función tiene una discontinuidad evitable en x=0; y si $a\neq-2$, una discontinuidad de salto finito.

1 Ya que $\operatorname{sen} f \sim f$ si f es un infinitésimo.

2 Multiplicamos numerador y denominador por -1.

3 Ya que, en x=0, $1-\cos x \sim x^2/2$. También se puede multiplicar numerador y denominador por $1+\cos x$, y utilizar luego el hecho de que, en x=0, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 6: *Estudia el comportamiento en $+\infty$ de la función:*

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

La recta y=-6 es asíntota horizontal de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}\overset{1}{=}\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}\overset{2}{=}\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}-1\right)\right]}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\cdot\left(\frac{x-2-x-1}{x+1}\right)\right]}=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x}{x+1}}\overset{3}{=}\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x}{x}}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-6)}=\ln e^{-6}\overset{4}{=}-6\cdot\ln e=-6\cdot 1=-6$$

1 Aplicamos la regla del límite de la composición.

2 Ya que sale la expresión indeterminada 1^{∞}.

3 Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

4 Por las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 7: *Encuentra la aproximación por defecto con dos cifras decimales de la solución de la ecuación 1-2x-sen x=0. Acota el error cometido.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=1-2x-\operatorname{sen} x$.

Esta función es continua en R, ya que si $a\in R$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [1-2x-\operatorname{sen} x] = 1-2a-\operatorname{sen} a = f(a)$$

Como $f(0)=1>0$ y $f(1)=-1-\operatorname{sen} 1<0$, estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una centésima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	0	1	0,5	0,3	0,4	0,35	0,33	0,34
y	+	-	-	+	-	-	+	-

Como f es continua en [0,33;0,34] y $f(0,33)\cdot f(0,34)<0$, por el teorema de Bolzano existe c en (0,33;0,34) tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow 1-2c-\operatorname{sen} c=0$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como c pertenece al intervalo (0,33;0,34), una solución aproximada por defecto con dos cifras decimales es 0,33. El error cometido es, evidentemente, menor que 0,01.