

1) (2p) Define:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$.

b) Asíntota oblicua en $+\infty$.

2) (1p) Enuncia el teorema de Bolzano.

3) (1,8p) Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2}$$

4) (1,7p) Halla las ecuaciones de las asíntotas verticales de la siguiente función y estudia su posición relativa:

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x^2}$$

5) (1,8p) Estudia el comportamiento en $-\infty$ de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

6) (1,7p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = (2 - \cos x)^{1/x^2}$$

Ejercicio 3: Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2} \right) = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{0}{0-1} = 0$
- $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2} \leq 1$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2} \right) \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Evidentemente, el argumento del seno es un infinitésimo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

¹ Ya que $\operatorname{sen} f \sim f$ si f es un infinitésimo.

² Ya que $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x , simplificando a continuación.

Ejercicio 4: Halla las ecuaciones de las asíntotas verticales de la siguiente función y estudia su posición relativa:

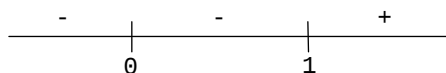
$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x^2}$$

(1, 7 PUNTOS)

* * *

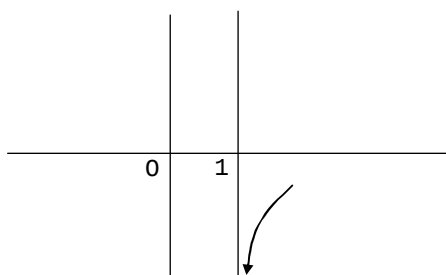
Solución:

1º) Dom(f)=(1,+∞), ya que el signo del argumento del logaritmo es el siguiente:



2º) La recta x=1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln \frac{x-1}{x^2} \stackrel{1}{=} \ln \frac{0^+}{1} = \ln 0^+ = -\infty$$



¹ Aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 5: Estudia el comportamiento en $-\infty$ de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

La recta $y=-2$ es asíntota horizontal de la función en $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{-x} \stackrel{2}{=} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} = - \sqrt{4 + \frac{1}{+\infty}} = -\sqrt{4+0} = -2 \end{aligned}$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} + 2 = \frac{\sqrt{4x^2+1} + 2x}{x} \stackrel{3}{=} \frac{\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{4x^2}}{x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ cuando $x < 0$.

² Por las propiedades de los límites.

³ Ya que, en $-\infty$, como $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Por tanto, $2x = \sqrt{4} \cdot (-\sqrt{x^2}) = -\sqrt{4x^2}$.

Ejercicio 6: Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = (2 - \cos x)^{1/x^2}$$

(1, 7 PUNTOS)

* * *

Solución:**1º)** $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} 2 - \cos x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a \in \text{Dom}(f)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (2 - \cos x)^{1/x^2} = (2 - \cos a)^{1/a^2} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en $x=0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{1/x^2} \stackrel{1}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \cdot (2 - \cos x - 1) \right]} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} \stackrel{2}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

¹ Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞ .

² Ya que, en $x=0$, $1 - \cos x \sim x^2/2$. También puede multiplicarse numerador y denominador por el conjugado del numerador y tener luego en cuenta que, en $x=0$, $\sin x \sim x$.