1) (3p) Define:

a) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)=3$.

b) Infinitésimo.

c) Función continua en un punto.

2) (1,6p) Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(e^x-1)}{e^{2x}-1}$$

3) (1,8p) Halla la ecuación de la asíntota que la siguiente función tiene en $+\infty$:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x}-2x$$

4) (1,8p) Halla el dominio y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln x^2}$$

5) (1,8p) Dada la función $f(x)=x-1+\sqrt{\ln(x+1)}$, prueba que existe α en el intervalo $(0,e-1)$ tal que $f(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Ejercicio 2: *Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:*

$$f(x)=\frac{sen(e^x-1)}{e^{2x}-1}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(e^x-1)}{e^{2x}-1}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}\overset{2}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{sen(e^x-1)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{e^{2x}-1}\cdot sen(e^x-1)\right]=0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{e^{+\infty}-1}=\frac{1}{+\infty-1}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $-1\leq sen(e^x-1)\leq 1$

[1] Ya que $sen f \sim f$ si f es un infinitésimo.
[2] Ya que $e^f-1\sim f$ si f es un infinitésimo. También puede hacerse simplificando la expresión después de descomponer el denominador en factores.

Ejercicio 3: *Halla la ecuación de la asíntota que la siguiente función tiene en $+\infty$:*

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x}-2x$$ (1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

La recta y=-x-2 es la asíntota oblicua de la función en $+\infty$:

- $k=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-2x\right)\overset{1}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}-2\right)\right]=$

$$=+\infty\cdot\left(\sqrt{1-\frac{4}{+\infty}}-2\right)=+\infty\cdot\left(\sqrt{1-0}-2\right)=+\infty\cdot(1-2)=+\infty\cdot(-1)=-\infty$$

- $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}-2x}{x}\overset{2}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}-2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}-2\right)=$

$$=\sqrt{1-\frac{4}{+\infty}}-2=\sqrt{1-0}-2=1-2=-1$$

- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-2x+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)\overset{3}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}\overset{4}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}=$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{+\infty}}+1}=\frac{-4}{\sqrt{1-0}+1}=\frac{-4}{1+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\sqrt{x^2-4x}-2x+x+2=\sqrt{x^2-4x}-(x-2)\overset{5}{=}\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-4x+4}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el sustraendo es mayor que el minuendo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

---

[1] Sacamos x factor común.
[2] Sacamos x factor común en el numerador.
[3] Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.
[4] Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.
[5] Ya que, en $+\infty$, como $x-2>0$, $x-2=|x-2|=\sqrt{(x-2)^2}$.

Ejercicio 4: Halla el dominio y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln x^2}$$ *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f)=(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$:

$$\begin{cases}1+x>0\\ x^2>0\\ \ln x^2\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-1\\ x\neq 0\\ x\neq 1\end{cases}$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in\text{Dom}(f)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \overset{1}{=} \frac{\ln(1+a)}{\ln a^2} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \overset{1}{=} \frac{\ln 1}{\ln 0^+} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

4º) La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=1$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \overset{1}{=} \frac{\ln 2}{\ln 1^-} = \frac{\ln 2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \overset{1}{=} \frac{\ln 2}{\ln 1^+} = \frac{\ln 2}{0^+} = +\infty$$

[1] Para calcular el límite del numerador y el límite del denominador aplicamos la regla del límite de la composición.

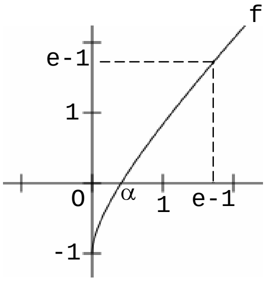
Ejercicio 5: *Dada la función $f(x)=x-1+\sqrt{\ln(x+1)}$, demuestra que existe $\alpha\in(0,e-1)$ tal que $f(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe $\alpha\in(0,e-1)$ tal que $f(\alpha)=0$.

En efecto:



1ª) $f(0)\cdot f(e-1)<0$:

- $f(0)=-1+\sqrt{\ln 1}=-1+0=-1<0$
- $f(e-1)=e-1-1+\sqrt{\ln e}=e-2+1=e-1>0$

2ª) f es continua en $[0,e-1]$:

- $[0,e-1]\subset \mathrm{Dom}(f) \overset{1}{=} [0,+\infty)$.
- Si $a\in[0,e-1]$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}[x-1+\sqrt{\ln(x+1)}] \overset{2}{=} a-1+\sqrt{\ln(a+1)}=f(a)$$

1 $\ln(x+1)\geq 0 \Rightarrow x+1\geq 1 \Rightarrow x\geq 0$.

2 Para calcular el límite del radicando aplicamos la regla del límite de la composición.