Índice: Otra forma de expresar la derivada de una función en un punto. Función derivada. La tabla de derivadas. Derivadas sucesivas. Orden de contacto. Problemas.

1.- Otra forma de expresar la derivada de una función en un punto

Hemos visto en la primera lección distintos modos de expresar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x_0. O, lo que es lo mismo después de haber visto la lección anterior, distintas formas de expresar la derivada:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si en la segunda de esas expresiones se hace el cambio[1] $x=x_0+h$, queda:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

* * *

Apliquemos esta última fórmula al cálculo de la derivada de la función $f(x)=x^2$ en algunos puntos de su dominio:

- $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$
- $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=$
$=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$
- $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=$
$=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$
- Etc.

Ahora bien, ahorraríamos tiempo si, en lugar de calcular la derivada en cada punto por separado, lo hiciéramos en todos a la vez:

- $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=$
$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$

Resulta, pues, que $f'(x)=2x$. Aplicando esta fórmula, son inmediatas las derivadas anteriores: $f'(0)=2\cdot 0=0$, $f'(1)=2\cdot 1=2$, etc.

Pues bien, se dice que $f'(x)=2x$ es la derivada de $f(x)=x^2$.

[1] Observa que $h=\Delta x$.

2.- Función derivada

Se llama *derivada de f*, y se denota por f', a la función dada por:

- $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- $Dom(f')=\{x\in Dom(f)\,|\,f'(x)\in R\}$

El dominio de f' se llama *dominio de derivabilidad de f* y, como se sigue de la definición, es un subconjunto de Dom(f):

$$Dom(f')\subset Dom(f)$$

Así, la derivada de la función $f(x)=\ln x$, cuyo dominio es $(0,+\infty)$, es, como veremos, la función $f'(x)=1/x$. Por tanto, $Dom(f')=(0,+\infty)$.

* * *

Normalmente, el dominio de derivabilidad de una función suele ser la unión de un número finito de intervalos. Necesitamos, pues, las siguientes definiciones:

- *La función f es derivable en el intervalo abierto (a,b)* si lo es en todos sus puntos.
- *La función f es derivable en el intervalo cerrado [a,b]* si lo es en (a,b), por la derecha en a y por la izquierda en b.
- *La función f es derivable en el intervalo semiabierto*[1] *[a,b)* si lo es en (a,b) y por la derecha en a.

3.- La tabla de derivadas

Aplicando la definición de función derivada,[2] vamos a calcular las derivadas de las funciones elementales más sencillas.[3]

1ª) La función constante, f(x)=k, es derivable en su dominio, y su derivada es f'(x)=0:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

2ª) La función identidad, f(x)=x, es derivable en su dominio, y su derivada es f'(x)=1:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

3ª) La función potencial de exponente natural, $f(x)=x^n$, es deriva-

---

[1] O *semicerrado*. Igualmente se define la derivabilidad en un intervalo del tipo (a,b].
[2] Aunque también puede utilizarse, como veremos, la definición de derivada de una función en un punto.
[3] La tabla completa de las derivadas la tienes en *Resúmenes* (en este mismo *blog*).

ble en su dominio, y su derivada es $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\overset{1}{=}\lim_{h\to 0}\frac{x^n\cdot\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)^n-1\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n\cdot\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^n-1\right]}{h}\overset{2}{=}\lim_{h\to 0}\frac{x^n\cdot n\cdot\frac{h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}(n\cdot x^{n-1})=n\cdot x^{n-1}$$

4ª) La función $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$ es derivable en todos los puntos de su dominio,[3] excepto en x=0, y su derivada es $f'(x)=\frac{1}{n}\cdot x^{1/n-1}$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x}\cdot\left(\sqrt[n]{\frac{x+h}{x}}-1\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x}\cdot\left(\sqrt[n]{1+\frac{h}{x}}-1\right)}{h}\overset{4}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x}\cdot\frac{h/x}{n}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x}}{n\cdot x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{n\cdot x}=\frac{1}{n}\cdot x^{1/n-1}$$

5ª) La función valor absoluto, $f(x)=|x|$, es derivable en todos los puntos de su dominio, excepto en x=0, y su derivada es $f'(x)=\frac{|x|}{x}$:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}\overset{5}{\Rightarrow} f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}\overset{6}{\Rightarrow} f'(x)=\frac{|x|}{x}$$

4.- Derivadas sucesivas

La derivada de f' se llama *derivada segunda de f*, y se denota por f"; la derivada de f" se llama *derivada tercera de f*, y se denota por f'''; etc. En general,[7] la *derivada enésima de f* se denota por $f^{(n)}$.

* * *

Por ejemplo:

$$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow f'''(x)=0\ldots$$

---

[1] Sacamos factor común x^n. Observa que la demostración no es válida para x=0, ya que aparece en el denominador. Sin embargo, la fórmula resultante puede utilizarse también para x=0, ya que (puedes comprobarlo) f'(0)=0.
[2] Ya que $(1+f)^n-1\sim n\cdot f$ si f es un infinitésimo (ver el problema 3 de la lección L-10).
[3] Si n es par, Dom(f)=[0,+∞); y si n es impar, Dom(f)=R.
[4] Ya que $\sqrt[n]{1+f}-1\sim f/n$ si f es un infinitésimo (ver el problema 3 de la lección L-10).
[5] Ya vimos en la lección anterior que esta función no es derivable en x=0. La comprobación de que la derivada de –x es -1 corre de tu cuenta.
[6] Si x<0, |x|/x=-x/x=-1; y si x>0, |x|/x=x/x=1.
[7] En algunas cuestiones teóricas suelen emplearse las notaciones $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ y $f^{(3)}$ en lugar de las más habituales f', f" y f''', respectivamente. En esos casos $f^{(0)}$ es f.

5.- Orden de contacto

Dos funciones f y g tienen un *contacto de orden n* en el punto $P(x_0,y_0)$ si cumplen las dos condiciones siguientes:

1ª) $f(x_0)=g(x_0),\ f'(x_0)=g'(x_0),\ f''(x_0)=f''(x_0),\dots,\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$.

2ª) $f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$.

6.- Problemas

1) Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}$ **b)** $f(x)=|x^2-x|$ **c)** $f(x)=1/x$

d) $f(x)=|x|-x^2$ **e)** $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$ **f)** $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ 1+x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

2) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } -1\leq x\leq 1 \\ 2x^2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

3) Deriva las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

a) $f(x)=x\cdot|x|$ **b)** $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **c)** $f(x)=|x^2-4|$

4) Calcula las ecuaciones de la tangente y de la normal[1] a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $x\cdot y=1$ en $(3,1/3)$ **b)** $y^2=8x$ en $(2,-4)$

c) $y=\sqrt[5]{x}$ en $(1,1)$ **d)** $y=x^3$ en $(-2,-8)$

5) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones trazadas desde los puntos indicados:

a) $y=x^3$ desde $(0,2)$ **b)** $y=\sqrt{x}$ desde $(-4,0)$

6) Calcula la ecuación de la normal a la gráfica de la función $y=x^2$ trazada desde el punto $(6,3)$.

---

[1] Se llama *normal* a una curva en un punto a la perpendicular a la tangente en dicho punto.