Índice: La regla de L'Hôpital. Problemas.

1.- La regla de L'Hôpital

Sea x_0 un número real, y sean f y g dos funciones que cumplen las cuatro condiciones siguientes:

1ª) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$.

2ª) f y g son derivables en un entorno reducido de x_0.

3ª) $g'(x)\neq 0$ en dicho entorno reducido.

4ª) existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* * *

Aplicaremos esta regla sin comprobar (salvo que se pida) las condiciones segunda y tercera (las otras dos son inevitables).

Por ejemplo, calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{n\cdot x^{n-1}}{1}=\frac{n\cdot 1^{n-1}}{1}=n$$

* * *

En algunos problemas se requiere aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x-e^x}{(\operatorname{arc\,tg} x)^2} \overset{2}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x-e^x}{x^2} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-e^x}{2x} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$$

* * *

La regla de L'Hôpital vale también cuando se trata de un límite lateral y cuando x_0 es $+\infty$ o $-\infty$. Y es cierta si en lugar de 0/0 sale ∞/∞.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \overset{3}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1/x}=\lim_{x\to +\infty}(x\cdot e^x)=+\infty$$

---

[1] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
[2] Ya que $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$ en x=0. Observa que de este modo simplificamos la aplicación de la regla de L'Hôpital, ya que la derivada del denominador resulta ser más sencilla.
[3] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.

* * *

En algunas ocasiones se reduce el número de veces que se requiere aplicar la regla de L'Hôpital si previamente se trasforma la función adecuadamente.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x/n}}\right)^n\overset{1}{=}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x/n}}\right)^n\overset{2}{=}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x/n}\cdot 1/n}\right)^n=\left(\frac{1}{+\infty}\right)^n=0$$

Si no hubiésemos hecho la transformación, tendríamos que haber aplicado L'Hôpital n veces consecutivas.

* * *

La regla de L'Hôpital también permite resolver las indeterminaciones $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞ y $(+\infty)^0$, si bien antes hay que transformarlas[3] en $0/0$ o ∞/∞.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}x^x\overset{4}{=}\lim_{x\to 0^+}e^{x\cdot\ln x}\overset{5}{=}e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)}\overset{6}{=}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}}\overset{2}{=}e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{\lim_{x\to 0^+}(-x)}=e^0=1$$

* * *

Conviene señalar que la regla de L'Hôpital no siempre funciona, aun cumpliéndose las hipótesis.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{2x}}{e^x+e^{3x}}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2e^{2x}}{e^x+3e^{3x}}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+4e^{2x}}{e^x+9e^{3x}}\overset{7}{=}\dots$$

Por tanto, no hay que olvidar los procedimientos elementales de cálculo de límites.

* * *

Hay algunos límites que no requieren de la regla de L'Hôpital, pues basta para calcularlos aplicar la definición de derivada de una función en un punto:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

[1] Por las propiedades de los límites.
[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.
[3] Ver el apartado 4 de la lección L-5.
[4] Transformamos la indeterminación 0^0 en $0\cdot\infty$. Como el dominio de la función es $(0,+\infty)$, este límite coincide con el límite lateral derecho.
[5] Por las propiedades de los límites.
[6] Transformamos la indeterminación $0\cdot\infty$ en ∞/∞.
[7] Como se ve, lo único que conseguimos aplicando la regla de L'Hôpital es complicar cada vez más el límite.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}\overset{1}{=}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\cos a$$

Lo mismo sucede en límites del siguiente tipo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

En efecto, dividiendo numerador y denominador entre x-a, resultan ser un cociente de derivadas:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^x-1}\overset{2}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}\overset{3}{=}\frac{-\operatorname{sen}0}{e^0}=\frac{0}{1}=0$$

* * *

Por último, hay que tener especial cuidado con la última de las condiciones de la regla de L'Hôpital.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x}\overset{4}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1}$$

Evidentemente, este segundo límite no existe. Lo cual no significa que el primero no exista. Lo único que quiere decir es que en este caso, al no cumplirse la cuarta condición de la regla de L'Hôpital, no se puede aplicar ésta. De hecho, el primer límite sí que existe:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}x\right)=1-0=1$$

2.- Problemas

1) Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{x}$

---

[1] Si $f(x)=\operatorname{sen}x$.
[2] Si $f(x)=\cos x$ y $g(x)=e^x$.
[3] Ya que $f'(x)=-\operatorname{sen}x$ y $g'(x)=e^x$.
[4] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para ver que el numerador tiende a +∞, basta sacar factor común x y fijarse que el sustraendo de la resta que resulta es el producto de un infinitésimo por una función acotada.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ **e)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{arc\,tg} x}$ **f)** $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2+2x-3}$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x^2-1}$ **h)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ **i)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1}$

2) Halla:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x+x^2)}{x}$ **e)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi+x)-\operatorname{sen}\pi}{x}$ **f)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(1+x)}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ **h)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen} x}$ **i)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\operatorname{tg} x}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{4^x-2^x}{\operatorname{sen}(4x)}$ **k)** $\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(3x-6)}{\operatorname{tg}(4x-8)}$ **l)** $\lim_{x\to +\infty} [x(a^{1/x}-1)]$

3) Calcula el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{3^{2x}}{x^7}$ **b)** $y=\frac{x^3}{2^x}$ **c)** $y=\frac{5^x}{(\log_2 x)^3}$ **d)** $y=\frac{(\log_3 x)^5}{7^x}$

e) $y=\frac{x^2}{\ln^3 x}$ **f)** $y=\frac{\log^7 x}{x}$ **g)** $y=\frac{x}{\log_{1/2} x}$ **h)** $y=\frac{\pi^x}{(\log_{1/3} x)^3}$

4) Halla el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^3}{\sqrt{e^x}}$ **b)** $y=\frac{\sqrt[3]{2^x}}{x^4}$ **c)** $y=\frac{\sqrt[4]{2^x}}{(\ln x)^3}$ **d)** $y=\frac{\log^2 x}{\sqrt{4^x}}$

e) $y=\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$ **f)** $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{2^x}$ **g)** $\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}$ **h)** $y=\frac{\sqrt{\ln x}}{3^{2x}}$

5) Calcula el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones:

a) $y=x^3-3^x$ **b)** $y=4^x-\sqrt{x^4+1}$ **c)** $y=\ln x^2-2x^3$ **d)** $y=e^x-x^4$

e) $y=x^4-\ln x$ **f)** $y=2^x-\frac{x^3}{x+1}$ **g)** $y=\frac{\ln(x^3+8)}{4x^3-7}$ **h)** $y=\frac{3^x}{\ln(x^2+1)}$

i) $y=\frac{x^4+8}{e^x}$ **j)** $y=\frac{x+\ln^2 x}{\ln x}$ **k)** $y=\frac{5x^3-2x^2}{e^x+x}$ **l)** $y=\frac{\ln(x^3+1)}{x^2+6}$