Índice: La regla de la cadena. Derivada de la función irracional. El método de derivación implícita. Problemas.

1.- La regla de la cadena

Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)=y_0$, entonces $g\circ f$ es derivable en x_0, y su derivada es $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$:

$$(g\circ f)'(x_0)\overset{1}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\overset{3}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot f'(x_0)\overset{4}{=}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\cdot f'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

* * *

NOTA:

Aunque esta misma situación se nos presentó ya en el apartado 3 de la lección L-10, quizá extrañe todavía que se diga en la nota 4 que se trata de una composición de funciones cuando lo que tenemos es el límite de un cociente. Sin embargo, consideremos la función:[5]

$$h(x)=\frac{g(x)-g(y_0)}{x-y_0}$$

Como $f(x_0)=y_0$:

$$h(f(x))=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}h(f(x))\overset{6}{=}\lim_{y\to y_0}h(y)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$

* * *

Por tanto:

---

[1] Aunque la regla es válida siempre, sólo la demostraremos cuando $f(x)\neq f(x_0)$ en un entorno reducido de x_0.
[2] Multiplicamos numerador y denominador por $f(x)-f(x_0)$. Podemos dar este paso por lo dicho en la nota anterior.
[3] El límite de un producto es igual al producto de los límites de los factores. El segundo límite es, evidentemente, $f'(x_0)$.
[4] Como se cumple la tercera condición del límite de la composición (ver lección L-8), podemos hacer el cambio de variable $f(x)=y$. Una explicación más detallada de este paso aparece en la NOTA del texto.
[5] Observa que es, salvo la letra de la variable independiente, la misma función que aparece después de haber hecho el cambio de variable $f(x)=y$.
[6] Como f es derivable en x_0, es continua en dicho punto. Por tanto, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=y_0$. Y si, como estamos suponiendo, $f(x)\neq f(x_0)=y_0$ en un entorno reducido de x_0, entonces se puede aplicar el límite de la composición, esto es, se puede hacer el cambio $f(x)=y$.

$$[g(f)]'\overset{1}{=}g'(f)\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, la función $y=|f|$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, salvo quizá en aquéllos en los que f se anula,[2] y su derivada es la función[3] $y'=\frac{|f|}{f}\cdot f'$:

$$y'=|f|'\overset{4}{=}[g(f)]'\overset{5}{=}g'(f)\cdot f'\overset{6}{=}\frac{|f|}{f}\cdot f'$$

2.- Derivada de la función irracional

La función $y=\sqrt[n]{f}=f^{1/n}$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, salvo quizá en aquéllos en los que f se anula[2], y su derivada es $y'=\frac{1}{n}\cdot f^{1/n-1}\cdot f'$:

$$y'=(\sqrt[n]{f})'\overset{7}{=}[g(f)]'\overset{5}{=}g'(f)\cdot f'\overset{8}{=}\frac{1}{n}\cdot f^{1/n-1}\cdot f'$$

* * *

Las funciones $y_1=\sqrt[n]{f^m}$ e $y_2=[\sqrt[n]{f}]^m$ requieren una consideración aparte.

• Si p/q es la fracción irreducible que resulta al simplificar la fracción m/n, entonces:

a) La función $y_1=\sqrt[n]{f^m}$ coincide con la función $y=\sqrt[q]{f^p}$, salvo que m y n sean números pares y p sea un número impar, en cuyo caso coincide con la función[9] $y=\sqrt[q]{|f|^p}$.

b) La función $y_2=[\sqrt[n]{f}]^m$ coincide con la función $y=\sqrt[q]{f^p}$, salvo que m y n sean números pares y q sea un número impar, en cuyo caso y_2 es una restricción de y, por lo que habrá que mencionar su dominio.

• Si m/n es una fracción irreducible, la función $y=\sqrt[n]{f^m}=f^{m/n}$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, salvo quizá en aquéllos en los que f se anula[2], y su derivada es la función $y'=\frac{m}{n}\cdot f^{m/n-1}\cdot f'$:

---

1 $g\circ f=g(f)$.
2 En estos puntos habrá que averiguar la derivabilidad de la función.
3 En los problemas concretos hay que estudiar el signo de f y sustituir |f|/f por 1 o -1, según sea f positiva o negativa, dando lugar así a una función definida a trozos.
4 Si $g(x)=|x|$, entonces $g(f)=|f|$.
5 Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.
6 Como $g'(x)=|x|/x$ (ver lección D-3), entonces $g'(f)=|f|/f$.
7 Si $g(x)=\sqrt[n]{x}$, entonces $g(f)=\sqrt[n]{f}$.
8 Como $g'(x)=(1/n)\cdot x^{1/n-1}$, entonces $g'(f)=(1/n)\cdot f^{1/n-1}$.
9 Evidentemente, si f es una función positiva, sobra el valor absoluto.

$$y'=(\sqrt[n]{f^m})' \stackrel{1}{=} \frac{1}{n}\cdot(f^m)^{1/n-1}\cdot(f^m)'=\frac{1}{n}\cdot f^{m/n-m}\cdot m\cdot f^{m-1}\cdot f'=\frac{m}{n}\cdot f^{m/n-1}\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo:

$$y=\sqrt[4]{x^6} \stackrel{2}{=} \sqrt{|x|^3}=|x|^{3/2} \Rightarrow y'=\frac{3}{2}\cdot|x|^{1/2}\cdot|x|'=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-3\sqrt{-x}/2 & \text{si } x<0\\ 3\sqrt{x}/2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

Si calculas las derivadas laterales en el origen de coordenadas, comprobarás que la derivada de esta función en dicho punto es 0. Por tanto:

$$y'=\begin{cases}-3\sqrt{-x}/2 & \text{si } x<0\\ 3\sqrt{x}/2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Por ejemplo:

$$y=(\sqrt[6]{x})^8 \stackrel{3}{=} \sqrt[3]{x^4}=x^{4/3} \stackrel{4}{\Rightarrow} y'=\frac{4}{3}\cdot x^{1/3}=\frac{4\cdot\sqrt[3]{x}}{3}$$

3.- El método de derivación implícita

Este método se utiliza para obtener la derivada de una función dada implícitamente mediante una ecuación, es decir, sin que esté despejada la variable dependiente.[5] Y consiste en derivar los dos miembros de dicha ecuación, despejando a continuación, si se puede, y'.

Por ejemplo, calculemos por este método la derivada de[6] $y=\sqrt{x}$:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=x \stackrel{7}{\Rightarrow} 2y\cdot y'=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{2y} \stackrel{8}{=} \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Por ejemplo, calculemos la recta tangente en el punto P(3,3) a la curva dada por la ecuación $x^3+y^3=6xy$:

$$x^3+y^3=6xy \stackrel{7}{\Rightarrow} 3x^2+3y^2\cdot y'=6y+6xy' \stackrel{9}{\Rightarrow} 27+27y'=18+18y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y'=-9 \Rightarrow y'=-1 \Rightarrow y-3=-(x-3) \Rightarrow y-3=-x+3 \Rightarrow x+y-6=0$$

1 Aplicamos la fórmula obtenida al comienzo de este apartado.
2 Ya que 6/4=3/2 y 3 es impar.
3 Como se ha indicado en el texto, este paso es falso (ya que 8/6=4/3 y 3 es impar), salvo que se mencione que el dominio de la función sigue siendo [0,+∞).
4 Como Dom(f')⊂Dom(f), el dominio de la derivada es [0,+∞).
5 En los casos en los que no sea posible despejarla, supondremos la existencia de dicha función, así como su derivabilidad (el estudio de las condiciones que se deben cumplir para que esto sea así se salen completamente del nivel de este curso).
6 En este caso se trata de una función que sabemos es derivable.
7 La derivada del primer miembro de la ecuación es igual a la derivada del segundo.
8 Como en este caso conocemos y, podemos sustituirla por su valor.
9 En el punto P, x=3 e y=3.

4.- Problemas

1) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x^2-x-6}$ **b)** $y=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ **c)** $y=\dfrac{x^3}{3\cdot\sqrt{(1+x^2)^3}}$

d) $y=\sqrt{x+x\sqrt{x}}$ **e)** $y=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}$ **f)** $y=(2x-3)\cdot[\sqrt[6]{x+1}]^4$

g) $y=\left|\dfrac{x^2}{1-x}\right|$ **h)** $y=\sqrt[3]{3x^2}$ **i)** $y=(x-\sqrt{1-x^2})^2$

j) $y=\sqrt[10]{(x^3+2)^4}$ **k)** $y=|x^3+3x^2|$ **l)** $y=\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$

m) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **n)** $y=\sqrt[6]{(1+x^2)^{10}}$ **ñ)** $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$

o) $y=\sqrt[4]{(x^2-1)^6}$ **p)** $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$ **q)** $y=\left(\sqrt[20]{\dfrac{x}{x+1}}\right)^{12}$

2) Halla las ecuaciones de las tangentes y de las normales a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $x^2+y^2=8$ en $(2,-2)$ **b)** $6x^2+6y^2+x+6y=19$ en $(1,1)$

c) $x^2/3+y^2/4=1$ en $(-3/2,1)$ **d)** $x^2-y^2=9$ en $(5,4)$

e) $\sqrt{y}+xy^2=5$ en $(4,1)$ **f)** $y^2+2\sqrt{y}-x^2=2$ en $(-1,1)$

g) $x^5+xy^4-3x^2y=1$ en $(1,0)$ **h)** $y^3-3yx^2+3x=8$ en $(0,2)$

3) Calcula las ecuaciones de las tangentes a las siguientes cónicas paralelas a la recta r:

a) $x^2+y^2=25$, $r\equiv 4x+3y=12$ **b)** $2x^2+3y^2=5$, $r\equiv 2x-3y-1=0$

c) $2x^2-3y^2=6$, $r\equiv y=x$ **d)** $x^2+y^2-10x-4y=36$, $r\equiv 8x+y=3$

4) Halla las ecuaciones de las tangentes a las siguientes cónicas trazadas desde los puntos indicados:

a) $x^2+y^2=5$ desde $(-1,3)$ **b)** $x^2+3y^2=4$ desde $(-2,2)$

c) $x^2-2y^2=2$ desde $(4,0)$ **d)** $y^2=x$ desde $(0,-1)$

5) Encuentra los puntos de la siguiente elipse en los que la tangente forma un ángulo de 30º con el eje OX:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

6) Calcula la tangente del ángulo que forman las rectas tangentes a la elipse $3x^2+5y^2=8$ y a la parábola $y^2=x$ en el punto común a ambas curvas situado en el cuarto cuadrante.

7) Halla los puntos de la curva $x^2-xy+y^2=27$ en los que las tangentes son: a) horizontales; b) verticales.

8) Demuestra que la elipse $4x^2+9y^2=45$ y la hipérbola $x^2-4y^2=5$ son ortogonales.