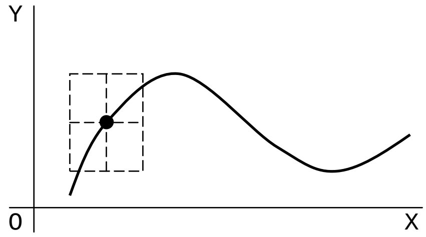
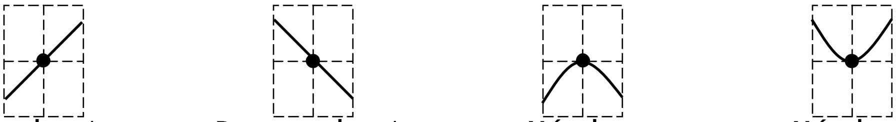
Índice: Introducción. Los conceptos básicos. El método. Problemas.

1.- Introducción

Disponemos de una cartulina transparente en la que hay dibujados unos ejes. Si la colocamos sobre un punto de la gráfica de una función como indica la figura, es fácil ver que se presentan cuatro casos,[1] mutuamente excluyentes,[2] según en qué par de cuadrantes de la cartulina se encuentre la gráfica de la función:[3]

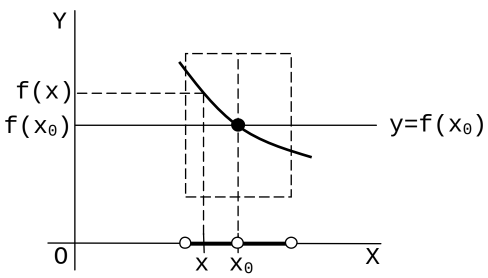


Según sea el caso, diremos que en ese punto la función es creciente, es decreciente, tiene un máximo relativo o tiene un mínimo relativo:



2.- Los conceptos básicos

Para conocer en qué situación de las cuatro nos encontramos, basta estudiar la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la recta horizontal $y=f(x_0)$, esto es, basta saber el signo de la función auxiliar $g(x)=f(x)-f(x_0)$ en las proximidades de x_0:



Esta función permite definir los cuatro conceptos básicos de la

[1] No estudiaremos los demás casos posibles.
[2] No pueden darse dos de ellos a la vez en un mismo punto.
[3] Suponemos, pues, definida la función en un entorno de dicho punto.

siguiente manera:[1]

1º) La función f es *creciente en* x_0 si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $g(x)=f(x)-f(x_0)$ es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0.

2º) La función f es *decreciente en* x_0 si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $g(x)=f(x)-f(x_0)$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de x_0.

3º) La función f tiene un *máximo relativo*[2] *en* x_0 *que vale* $f(x_0)$ si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $g(x)=f(x)-f(x_0)$ es negativa.

4º) La función f tiene un *mínimo relativo*[2] *en* x_0 *que vale* $f(x_0)$ si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $g(x)=f(x)-f(x_0)$ es positiva.

* * *

Por ejemplo, analicemos el comportamiento[3] de la función $f(x)=mx+b$ en un punto cualquiera $x=x_0$.

Evidentemente, $g(x)=f(x)-f(x_0)=(mx+b)-(mx_0+b)=m(x-x_0)$. Veamos cuál es el signo de g a izquierda y derecha de dicho punto:

g(x)	$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$
m>0	-	0	+
m<0	+	0	-

Por tanto, las rectas con pendiente positiva son crecientes en todos sus puntos; y las de pendiente negativa, decrecientes.

* * *

Otro ejemplo. Estudiemos el comportamiento de la función *signo*[4] en el origen de coordenadas.

Como *Sig*(0)=0, resulta que g(x)=*Sig*(x)-*Sig*(0)=*Sig*(x). Veamos cuál es el signo de g a izquierda y derecha de dicho punto:

	x<0	**x=0**	**x>0**
g(x)	-	0	+

Por tanto, la función *signo* es creciente en x=0.

Este ejemplo muestra que los conceptos que hemos visto se refieren también a las funciones que son discontinuas en el punto que se está estudiando.

* * *

[1] En las definiciones, aunque no se dice explícitamente, es evidente que f debe estar definida en un entorno de x_0, como se ha indicado en la nota 3 de la página anterior.
[2] O *local*.
[3] La palabra *comportamiento* se refiere aquí a la *monotonía* (crecimiento y decrecimiento) y a los *extremos* (máximos y mínimos).
[4] Recuerda su definición (ver lección L-3).

Una función es *creciente en un intervalo abierto (a,b)* si lo es en todos sus puntos.

Una función es *decreciente en un intervalo abierto (a,b)* si lo es en todos sus puntos.

* * *

Por ejemplo, las rectas de pendiente positiva son crecientes en R; y las de pendiente negativa, decrecientes.

3.- El método

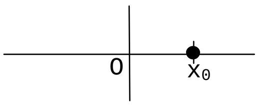
El método que vamos a utilizar para estudiar el comportamiento de una función f en un punto x_0 de su dominio se basa en las propiedades de la función $g(x)=f(x)-f(x_0)$, que son las siguientes:

1ª) $g(x_0)=0$.

2ª) $g'(x)=f'(x)$, $g''(x)=f''(x)$, etc.[1]

* * *

De estas propiedades se deduce[2] con facilidad que el comportamiento de la función f en x_0 coincide con el de g. En efecto, como $g(x_0)=0$, el punto $(x_0,0)$ pertenece a la gráfica de la función g:



Por tanto, si g fuese creciente en x_0, su gráfica se encontraría por debajo del eje de abscisas a la izquierda de x_0 y por encima a su derecha, esto es, su signo sería negativo a la izquierda y positivo a la derecha de dicho punto; pero eso significa (ver la definición) que f también es creciente en x_0. Y lo mismo sucede en los demás casos.

Otro modo de verlo consiste en darse cuenta de que la gráfica de g es una traslación vertical de la gráfica de f. Por tanto, el comportamiento de ambas funciones en x_0 es el mismo.

Por ejemplo, si $f(x)=x^2+x$ y $x_0=1$, entonces $g(x)=f(x)-f(1)=x^2+x-2$. Evidentemente, la gráfica de g es la misma que la de la f, pero situada dos unidades más abajo:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	2	0	0	2	6	12	20
g(x)	0	-2	-2	0	4	10	18

[1] Suponemos, pues, que f es tantas veces derivable como sea necesario.
[2] Puedes intentar la demostración por tu cuenta. Basta que hagas los tres primeros ejercicios contenidos en *Ejercicio 6.1* (ver *Resúmenes*, en este mismo *blog*).

Por consiguiente, basta con estudiar la función g. Y esto lo haremos en dos pasos:

1º) Señalaremos gráficamente lo que en cada caso conozcamos de la función g y sus derivadas.

2º) Deduciremos de ello el comportamiento de g en x_0; y, puesto que es el mismo, el de f.

* * *

En las dos próximas lecciones demostraremos mediante este método los criterios que nos van a permitir estudiar la monotonía y los extremos de una función.[1]

4.- Problemas

1) Estudia el comportamiento de las siguientes funciones en el origen de coordenadas:

a) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(1/x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} \ln|x| & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

2) Calcula:[2]

a) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{6x}-x)^{1/x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\operatorname{sen} x)^x$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x+\cos x)^{1/x}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (\ln x)^{x-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\operatorname{sen} x}$ **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^{1/x}$ **j)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} [\ln(1+x)]^x$

k) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$ **l)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1/x)^{\operatorname{tg} x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x-2}{x^2+x-2}\right)^{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ **n)** $\lim\limits_{x\to 0} [1+\operatorname{tg}(2x)]^{4/x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\cdot \ln\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ **o)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x\cdot \ln\dfrac{x+a}{x-a}\right)$

[1] Si no fuera posible aplicar estos criterios, habrá que proceder como hemos hecho con la función *signo* en el origen de coordenadas, esto es, aplicar directamente las definiciones.

[2] Seguimos con los límites de L'Hôpital.