Índice: Criterio de la variación del signo de la derivada primera. Condición necesaria de extremo relativo. Problemas.

1.- Criterio de la variación del signo de la derivada primera

Si f es continua en x_0 y existe un entorno de dicho punto en el que f' es:

a) positiva a ambos lados de x_0, entonces f es creciente en x_0.

b) positiva a la izquierda y negativa a la derecha de x_0, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

c) negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

d) negativa a ambos lados de x_0, entonces f es decreciente en x_0.

* * *

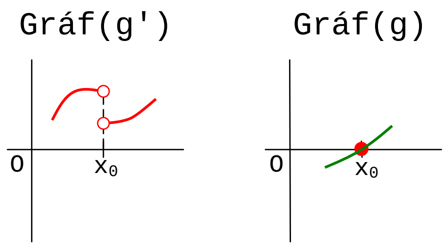
Demostremos,[1] por ejemplo, el primer apartado.

1º) Señalamos en rojo lo que conocemos de la función g y sus derivadas:

- Como $g(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$Gráf(g).
- Como g'=f', g' es positiva[2] a ambos lados de x_0.

2º) Deducimos el comportamiento de g en x_0:

- Como g' es positiva a izquierda y derecha de x_0, g crece[3] a ambos lados de dicho punto; y como es continua[4] en x_0 (por serlo[5] f), podemos dibujar su gráfica (verde) en un entorno de x_0.



CONCLUSIÓN: la función g es creciente en x_0. Por tanto, f también.

* * *

El criterio de la derivada primera, visto en la lección anterior, junto con el que acabamos de ver nos permiten estudiar la monotonía y los extremos de una función sin necesidad de calcular ninguna derivada más.

---

[1] Puedes intentar la demostración por tu cuenta. Basta que hagas los casos 9), 10), 11) y 12) del EJERCICIO 4 contenido en *Ejercicio 6.1* (ver *Resúmenes*, en este mismo *blog*).

[2] Sólo sabemos que la gráfica de g' se encuentra situada por encima del eje de abscisas a ambos lados de x_0.

[3] Por el criterio de la derivada primera.

[4] Recuerda que si g no fuese continua en x_0, nada se podría concluir.

[5] Ya que g es una traslación vertical de f. También podemos demostrar la continuidad de la función g en x_0 echando mano de la definición.

* * *

Para verlo, estudiemos de nuevo la función $f(x)=4x^5-5x^4$.

Después de aplicar el criterio de la derivada primera, habíamos llegado al siguiente resultado:

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f' es	+	-	+
f es	creciente	decreciente	creciente

Sólo falta averiguar lo que sucede en los puntos x=0 y x=1. Ahora bien, como la función f es continua en dichos puntos (por ser derivable en ellos), por el criterio de la variación del signo de la derivada primera concluimos que la función tiene un máximo relativo en x=0 que vale f(0)=0 y un mínimo relativo en x=1 que vale f(1)=-1.

* * *

Veamos otro ejemplo. Analicemos la función $f(x)=\ln\frac{e^x}{x+1}$.

Primero aplicamos el criterio de la derivada primera:

$$f(x)=\ln\frac{e^x}{x+1}=x-\ln(x+1) \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

Por tanto:[1]

Intervalos	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
f' es	-	+
f es	decreciente	creciente

Sólo nos queda por estudiar el punto x=0, en el que se anula la derivada. Ahora bien, como la función f es continua en dicho punto (pues es derivable en él), por el criterio de la variación del signo de la derivada primera concluimos que la función tiene en x=0 un mínimo relativo que vale $f(0)=\ln 1=0$.

2.- Condición necesaria de extremo relativo

Si f tiene un extremo relativo en x_0 y es derivable[2] en dicho punto, entonces $f'(x_0)=0$.

* * *

En efecto,[3] si $f'(x_0)\neq 0$, entonces, por el criterio de la derivada primera, f sería creciente o decreciente en x_0. Pero f tiene un extremo relativo en x_0. Esto es imposible. Por tanto, $f'(x_0)=0$.

---

[1] Observa que $Dom(f)=(-1,+\infty)$

[2] La función f puede tener un extremo relativo en x_0 y no ser derivable en x_0. Por ejemplo, la función $f(x)=|x|$ en x=0.

[3] La demostración se hace por reducción al absurdo.

* * *

Esta condición[1] expresa geométricamente que si una función es derivable en un extremo relativo, la tangente en dicho punto es paralela al eje de abscisas.

* * *

Por ejemplo. Dada la función $y=x^3+ax^2+bx+c$, vamos a calcular los parámetros a, b y c si se sabe que dicha función tiene un máximo relativo en -1 que vale 4 y un mínimo relativo en 3.

Teniendo en cuenta la condición necesaria de extremo relativo, podemos recoger la información en la siguiente tabla:[2]

x	y	y'
-1	4	0
3		0

Como $y=x^3+ax^2+bx+c$, $y'=3x^2+2ax+b$.

Como (-1,4) es un punto de la gráfica de y, $4=-1+a-b+c$.

Como (-1,0) es un punto de la gráfica de y', $0=3-2a+b$.

Como (3,0) es un punto de la gráfica de y', $0=27+6a+b$.

Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} a-b+c=5 \\ 2a-b=3 \\ 6a+b=-27 \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases} a-2a+3+c=5 \\ \boxed{b=2a-3} \\ 6a+2a-3=-27 \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} 3+3+c=5 \\ \boxed{a=-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=-1} \\ \boxed{b=-9} \end{cases}$$

* * *

Otro ejemplo. Nos piden que demostremos que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo (0,1):

$$f(x)=x+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)$$

Se procede como sigue:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, calculamos f':

$$f(x)=x+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right) \Rightarrow f'(x)=1-\pi x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)$$

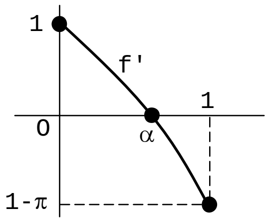
2º) Como la función f' cumple las condiciones de teorema de Bolzano,[5] existe α en (0,1) tal que $f'(\alpha)=0$:

a) $f'(0)\cdot f'(1)<0$:

[1] Observa que se trata de una condición necesaria, pero no suficiente. Por ejemplo, la derivada de la función $f(x)=x^3$ en el origen de coordenadas es cero y, sin embargo, la función es creciente en dicho punto.
[2] Una doble tabla, la de la función y la de su derivada.
[3] Despejamos b en la segunda ecuación y sustituimos el resultado en las otras dos.
[4] Despejamos a en la tercera ecuación y sustituimos el resultado en la primera.
[5] Al no saber resolver la ecuación $f'(x)=0$, tenemos que recurrir a este teorema.

- $f'(0)=1>0$.
- $f'(1)=1-\pi<0$.

b) f' es continua en [0,1]:



- $[0,1]\subset Dom(f')=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[0,1]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[1-\pi x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\right]=1-\pi a\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot a^2\right)=f'(a)$$

3º) Como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

3.- Problemas

1) Resuelve los problemas 2 y 3 de la lección anterior mediante el criterio de la variación del signo de la derivada primera.[1]

2) La función $f(x)=2x^3+px^2-q$ tiene en x=1 un mínimo relativo que vale 3. Calcula las constantes p y q.

3) Halla los valores de p y q para que la función $f(x)=x^3+px^2+q$ tenga un extremo relativo en el punto (-2,0). Averigua si tiene algún otro máximo o mínimo y hállalo.

4) Determina los parámetros en los siguientes casos:

a) $y=x^3+px^2+q$ tiene un mínimo en x=2 que vale 3.

b) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un máximo en el punto (-2,21) y un mínimo en (1,-6).

c) $y=ax^3-x^2/2+bx+8$ tiene un máximo en x=-1 y pasa por el punto (1,35/6).

d) $y=x^2+px+q$ tiene un mínimo en x=-3 y pasa por (-2,1).

e) $y=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un máximo en x=-4, un mínimo en x=0 y pasa por (1,1).

f) $y=ax^2+bx+6$ tiene un mínimo en x=2 y se anula para x=1.

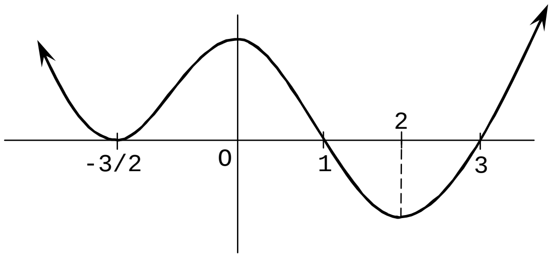
g) $y=x\cdot e^{kx}$ tiene un máximo en x=1.

h) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ pasa por (-1,2) y (2,3), y las tangentes en los puntos de abscisas 1 y -2 son paralelas al eje de abscisas.

i) $y=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c}$ tiene un extremo en (2,-1) y pasa por el origen de coordenadas.

[1] Habrás comprobado que algunos de esos ejercicios no se pudieron concluir mediante el criterio de la derivada enésima.

5) Si la gráfica de la función f' es la que aparece dibujada a continuación, averigua de la función f lo siguiente: a) intervalos de monotonía; b) extremos:



6) Demuestra que la función $f(x)=(x^2-2x)\cdot\cos x$ tiene un extremo en el intervalo (1,2). ¿Es máximo o mínimo?