Pautas para el cálculo de límites

1ª) Los límites se pueden “comprobar” con la calculadora.

2ª) La notación debe ser la correcta. En primer lugar, se debe indicar el límite que se está calculando a lo largo de todo el proceso, desapareciendo dicha indicación al *dar el paso al límite*, esto es, al sustituir x por aquello a que tiende. En segundo lugar, tiene que quedar claro durante todo el proceso la función a la que afecta dicho límite, encerrándola entre paréntesis si fuese necesario.

3ª) A veces, antes de dar el paso al límite, conviene operar, simplificar o transformar la función cuyo límite se quiere calcular (hay que conocer, pues, las operaciones elementales y las propiedades de las raíces, las potencias y los logaritmos). En otras ocasiones es preferible aplicar directamente las reglas de las operaciones con límites.

4ª) Para poder hallar los límites de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas hay que conocer sus gráficas o, en su defecto, saber utilizar la calculadora (con las trigonométricas, siempre en *rad*). Por ejemplo, el límite del logaritmo neperiano en 0 o en $+\infty$.

5ª) Si el límite es en $-\infty$ y aparecen raíces de índice par, conviene pasar a $+\infty$ mediante la fórmula:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

6ª) Si sale una indeterminación, se mete entre corchetes el cálculo que ha conducido a ella, siguiendo después el proceso adecuado para eliminarla. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} (x+1)^{1/x} = \left[(0+1)^{1/0}=1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} e^{(1/x)\cdot(x+1-1)} = \ldots$$

7ª) Hay que conocer las técnicas elementales que permiten eliminar las expresiones indeterminadas: sacar factor común, descomponer en factores, multiplicar y dividir por el conjugado. En particular:

- La indeterminación $L/0$ se resuelve estudiando el signo del 0.
- La indeterminación $1^{\pm\infty}$ se resuelve mediante la fórmula: $\lim_{x\to a} f^{g} = \lim_{x\to a} e^{g\cdot(f-1)}$.
- La indeterminación $\infty-\infty$ se resuelve sacando factor común uno de los dos infinitos: si éstos son equivalentes, aparece $0\cdot\infty$; y si no, ∞/∞.

8ª) Los límites laterales se utilizan necesariamente en los puntos que separan zonas de distinto comportamiento de la función. También en la indeterminación $L/0$, cuando el signo del cero dependa del lado por el que nos acerquemos.

9ª) A veces un cambio de variable adecuado simplifica o hace posible el cálculo de un límite.

10ª) El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo.

11ª) *Si f tiende a 0*, las funciones $\operatorname{sen} f$, $\operatorname{tg} f$, $\operatorname{arc\,sen} f$, $\operatorname{arc\,tg} f$, $\ln(1+f)$ y $e^{f}-1$ pueden sustituirse por f *siempre que sean factores o divisores*. La sustitución *deberá indicarse*. En las mismas condiciones también puede sustituirse $1-\cos f$ por $f^2/2$, $(1+f)^n-1$ por nf y $\sqrt[n]{1+f}-1$ por f/n.

12ª) Las indeterminaciones $0/0$ y ∞/∞ se eliminan por L'Hôpital (cuando se aplique esta regla, *deberá indicarse*). También se eliminan por L'Hôpital $0\cdot\infty$, $1^{\pm\infty}$, 0^0 y $(+\infty)^0$, pero antes hay que convertirlas en $0/0$ o ∞/∞:

- La expresión indeterminada $0\cdot\infty$ se convierte en una de las dos anteriores dividiendo uno de los factores por el inverso del otro: $a\cdot b=a/(1/b)=b/(1/a)$.
- Las expresiones indeterminadas $1^{\pm\infty}$, 0^0 y $(+\infty)^0$ se convierten en $0\cdot\infty$ con la fórmula $f^{g}=e^{g\cdot\ln f}$.