Índice: Optimación de funciones. Problemas.

1.- Optimación de funciones

Muchos problemas conducen a funciones que se requiere optimar, esto es, obtener un óptimo (máximo o mínimo).

Para ello seguiremos el siguiente esquema:

1º) Se escribe la función que se quiere optimar.

2º) Si la función depende de más de una variable, usando los datos del problema se expresa mediante una sola variable.

3º) A continuación, como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se deriva la función, se iguala a cero y se resuelve la ecuación. Las soluciones son posibles extremos de la función. Para ver si lo son o no, se aplica el criterio de la derivada segunda o, si el cálculo de ésta es complicado, el criterio de la variación del signo de la derivada primera. Por último, se interpreta el resultado en relación con el problema planteado.

* * *

Por ejemplo. Nos piden calcular dos números, x e y, cuya suma es 12 y cuyo producto es máximo.

El producto tiene que ser máximo:

$$P=x\cdot y$$

Tenemos que escribir el producto en función de una sola variable:

$$x+y=12 \Rightarrow y=12-x \Rightarrow P=x(12-x)=12x-x^2$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$P'=12-2x=0 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

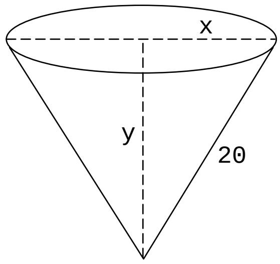
Para aplicar el criterio de la derivada segunda, derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en x=6:

$$P''=-2 \Rightarrow P''(6)=-2<0 \Rightarrow P \text{ es máximo en } x=6$$

Por tanto, x=6 e y=6.

* * *

Otro ejemplo. Se desea construir un embudo cónico de generatriz 20 cm. Nos piden que determinemos la altura del embudo para que sea de volumen máximo.



El volumen tiene que ser máximo:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi x^2\cdot y$$

Tenemos que expresar el volumen en función de una sola variable:

$$400=x^2+y^2 \Rightarrow x^2=400-y^2 \Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot\pi y\cdot(400-y^2)=\frac{400\pi y-\pi y^3}{3}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos,[1] igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$V'=\frac{400\pi-3\pi y^2}{3}=0 \Rightarrow 400\pi=3\pi y^2 \Rightarrow y=\pm\frac{20}{\sqrt{3}} \overset{2}{\Rightarrow} y=\frac{20}{\sqrt{3}}$$

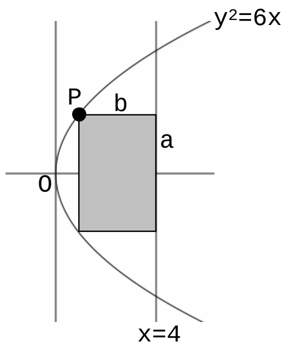
Para aplicar el criterio de la derivada segunda, derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $y=20/\sqrt{3}$:

$$V''=\frac{-6\pi y}{3}=-2\pi y \Rightarrow V''(20/\sqrt{3})<0 \Rightarrow V \text{ es máximo en } y=20/\sqrt{3}$$

Por tanto, $y=20/\sqrt{3}$ cm.

* * *

Otro ejemplo. Halla el rectángulo de área máxima inscrito en el segmento parabólico limitado por la curva $y^2=6x$ y la recta $x=4$:



El área tiene que ser máxima:

$$A \overset{3}{=} 2ab$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable.

[1] Observa que y es la variable independiente.
[2] Ya que y es positivo.
[3] A la mitad de la altura del rectángulo la designamos con la letra a. Según cómo se elijan las variables, se complicará más o menos el problema. Conviene, pues, pararse a pensárselo.

Ahora bien, las coordenadas del punto P son (4-b,a). Y como P pertenece a la gráfica de la función, debe satisfacer su ecuación:

$$a^2=6(4-b) \Rightarrow a^2=24-6b \Rightarrow 6b=24-a^2 \Rightarrow b=\frac{24-a^2}{6} \Rightarrow A=\frac{24a-a^3}{3}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos,[1] igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\frac{24-3a^2}{3}=8-a^2=0 \Rightarrow a^2=8 \Rightarrow a=\pm\sqrt{8} \overset{2}{\Rightarrow} a=2\sqrt{2}$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda, derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $a=2\sqrt{2}$:

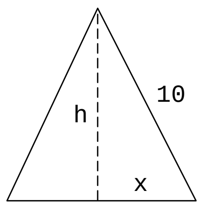
$$A''=-2a \Rightarrow A''(2\sqrt{2})=-4\sqrt{2}<0 \Rightarrow A \text{ es máximo en } a=2\sqrt{2}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo son:

$$2a=4\sqrt{2} \text{ y } b=\frac{24-8}{6}=\frac{8}{3}$$

* * *

Un ejemplo más. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 10 cm. Halla la longitud de la base (lado desigual) para que el área sea máxima:



El área del triángulo tiene que ser máxima:

$$A \overset{3}{=} xh$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$100=x^2+h^2 \Rightarrow h^2=100-x^2 \Rightarrow h=\pm\sqrt{100-x^2} \Rightarrow h=\sqrt{100-x^2} \Rightarrow A=x\cdot\sqrt{100-x^2}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\sqrt{100-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Rightarrow 100=2x^2 \overset{4}{\Rightarrow} x=5\sqrt{2}$$

Como el cálculo de la derivada segunda no es inmediato,[5] aplicamos el criterio de la variación del signo de la derivada primera:

---

[1] Observa que a es la variable independiente (no es una constante).
[2] Ya que a es positivo.
[3] A la mitad de la base del triángulo la designamos con la letra x.
[4] Evidentemente, x es positivo.
[5] En la próxima lección veremos cómo es posible simplificar estos cálculos.

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & 5\sqrt{2} & \end{array}$$

El área es máxima cuando la base del triángulo mide $10\sqrt{2}$ cm.

2.- Problemas

1) Halla las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima que tiene un perímetro de 18 cm.

2) Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima inscrito en una circunferencia de radio R.

3) Halla los lados del triángulo rectángulo de área máxima que tiene un perímetro de 14 cm.

4) Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros que tienen por lados dichas partes.

5) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2) y determina con las direcciones positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima?

6) Halla el rectángulo de 12 cm de perímetro que tiene la diagonal menor. ¿Cuánto mide esa diagonal?

7) Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito: a) en un triángulo isósceles de 10 cm de base y 15 cm de altura; b) en una circunferencia de radio R; c) en la elipse $x^2/9+y^2/4=1$.

8) Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que resultan, el menor tiene la forma de un triángulo rectángulo de catetos 10 y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo. Halla las dimensiones del espejo rectangular de área máxima que se puede obtener con el trozo mayor.

9) Una hoja de papel mide 2 m^2. Los márgenes superior e inferior miden 20 cm y los laterales, 12 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones si la parte impresa es máxima?