Índice: Simplificaciones del procedimiento de optimación de funciones. Problemas.

1.- Simplificaciones del procedimiento de optimación de funciones

Para evitar demasiados cálculos en los problemas de optimación de funciones, es conveniente en muchos casos tener en cuenta las dos siguientes simplificaciones:

1ª) En el cálculo de los extremos de una función cuya derivada es un cociente ($f'=N/D$) con denominador positivo ($D>0$), puede sustituirse f'' por N' al aplicar el criterio de la derivada segunda.

En efecto, si x_0 es una solución de la ecuación $f'(x)=0$, esto es, si $f'(x_0)=0$, entonces:

$$f''(x_0)=\frac{N'(x_0)\cdot D(x_0)-N(x_0)\cdot D'(x_0)}{D^2(x_0)}\overset{1}{=}\frac{N'(x_0)}{D(x_0)}$$

Y como $D(x_0)>0$, el signo de $f''(x_0)$ es el mismo que el de $N'(x_0)$.

* * *

Apliquémoslo al último ejemplo de la lección anterior. Habíamos obtenido la derivada primera:

$$A'=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

Evidentemente, $N=100-2x^2$ y $D=\sqrt{100-x^2}>0$.

Al resolver la ecuación $A'=0$, la única solución con sentido era $x=5\sqrt{2}$. Pues bien, la propiedad que acabamos de ver nos asegura que el signo de A'' en $5\sqrt{2}$ es el mismo que el de $N'=-4x$ en dicho punto: $N'(5\sqrt{2})=-4\cdot 5\sqrt{2}<0$. Por tanto, se trata de un máximo.

* * *

2ª) En el cálculo de los extremos de una función positiva, podemos sustituirla por su cuadrado.

En efecto, si $f>0$ y $g=f^2$, como $g'=2ff'$, las funciones f' y g' se anulan en los mismos puntos (con lo que los posibles extremos de f y g son los mismos); y en los puntos en que no se anulan, los signos coinciden (lo que asegura que f y g tienen los mismos extremos).

* * *

El mismo ejemplo de antes nos va a servir ahora.

Como se recordará, el área que tenía que ser máxima era:

$$A=x\cdot\sqrt{100-x^2}$$

[1] $f'(x_0)=0 \Rightarrow N(x_0)/D(x_0)=0 \Rightarrow N(x_0)=0$.

Como A>0, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=x^2\cdot(100-x^2)=100x^2-x^4$$

Derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=200x-4x^3=4x(50-x^2)=0 \overset{1}{\Rightarrow} x^2=50 \overset{2}{\Rightarrow} x=5\sqrt{2}$$

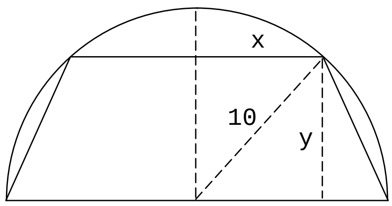
Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[3] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x=5\sqrt{2}$:

$$C''=200-12x^2 \Rightarrow C''(5\sqrt{2})=200-12\cdot 50=200-600<0$$

Por tanto, se trata de un máximo.

* * *

Por ejemplo, hay que hallar las dimensiones del trapecio isósceles de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio 10 cm.



El área tiene que ser máxima:

$$A=\frac{20+2x}{2}\cdot y=(10+x)\cdot y$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$100=x^2+y^2 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2} \Rightarrow A=(10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}$$

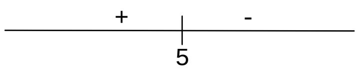
Como A>0, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=(10+x)^2\cdot(10^2-x^2)=(10+x)^3\cdot(10-x)$$

Derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=3(10+x)^2\cdot(10-x)-(10+x)^3=(10+x)^2\cdot(30-3x-10-x)=$$
$$=(10+x)^2\cdot(20-4x)=0 \Rightarrow 20-4x=0 \Rightarrow x=5$$

En este caso es cómodo utilizar el criterio de la variación del signo de la derivada primera:



Por tanto, se trata de un máximo.

La base menor del trapecio mide 10 cm y la altura, $5\sqrt{3}$ cm.

Si se prefiere aplicar el criterio de la derivada segunda, hay que

1 Si A>0, x no puede ser 0.
2 Si A>0, x no puede ser negativo.
3 También se puede utilizar el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

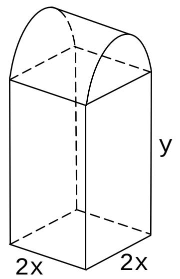
derivar de nuevo y calcular el valor de la derivada segunda en x=5:

$$C''=2(10+x)\cdot(20-4x)-4(10+x)^2=(10+x)(40-8x-40-4x)=-12x(10+x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C''(5)=-60\cdot 15<0$$

Con lo que se obtiene el mismo resultado.

* * *

Por ejemplo, queremos construir un depósito de 1000 litros de capacidad, de base cuadrada y rematado por un semicilindro. ¿Cuáles son las dimensiones del que requiere menos gasto de material?



El área total tiene que ser mínima:

$$A=4x^2+8xy+\pi x^2+2\pi x^2=8xy+(4+3\pi)x^2$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$1000=4x^2y+\frac{1}{2}\cdot\pi x^2\cdot 2x=4x^2y+\pi x^3 \Rightarrow y=\frac{1000-\pi x^3}{4x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=8x\cdot\frac{1000-\pi x^3}{4x^2}+(4+3\pi)x^2=\frac{2000-2\pi x^3}{x}+(4+3\pi)x^2=\frac{2000+(4+\pi)x^3}{x}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\frac{3(4+\pi)x^3-2000-(4+\pi)x^3}{x^2}=\frac{2(4+\pi)x^3-2000}{x^2}=0 \Rightarrow x=\frac{10}{\sqrt[3]{4+\pi}}$$

Al ser $x^2>0$, podemos sustituir A" por N':

$$N=2(4+\pi)x^3-2000 \Rightarrow N'=6(4+\pi)x^2 \Rightarrow N'(10/\sqrt[3]{4+\pi})>0$$

Por tanto, se trata de un mínimo.

Falta por calcular y:

$$y=\frac{1000-1000\pi/(4+\pi)}{4\cdot 100/\sqrt[3]{(4+\pi)^2}}=\frac{4000\cdot\sqrt[3]{(4+\pi)^2}}{400(4+\pi)}=\frac{10}{\sqrt[3]{4+\pi}}$$

Las dimensiones son $2x=20/\sqrt[3]{4+\pi}$ dm e $y=10/\sqrt[3]{4+\pi}$ dm.

2.- Problemas

1) La base menor de un trapecio rectángulo mide 7 cm y el lado oblicuo tiene una longitud de 6 cm. Halla la altura que haga máxima el área del trapecio.

2) Se precisa delimitar una superficie con flores, que tiene la forma de un sector circular, con un alambre de 20 m de longitud. ¿Qué radio de círculo y qué ángulo central hay que tomar para que la superficie sea máxima?

3) Un recinto está formado por un rectángulo y un semicírculo que tiene por diámetro uno de los lados del rectángulo. El área del recinto es de 5 m^2. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el perímetro del recinto sea mínimo.

4) Con una cuerda de 90 m de longitud se desea cercar dos jardines, uno cuadrado y otro circular. ¿Qué longitud se debe dar a cada trozo de cuerda para que la suma de las superficies sea mínima?

5) Sobre un pedestal de 4 m de altura se encuentra una estatua de 2 m. ¿A qué distancia del pedestal se ve la estatua bajo un ángulo máximo?

6) Calcula las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2=4x$, cuya distancia al punto A(4,0) es mínima.

7) Se quiere construir una caja abierta del máximo volumen posible cortando un cuadrado en cada esquina de una placa rectangular de cartón de 30 cm por 14 cm. ¿Cuánto debe medir el lado de dicho cuadrado?

8) La suma de todas las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 48 cm. Calcula las dimensiones de ese prisma para que su volumen sea máximo.

9) Halla las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en: a) una esfera de radio R; b) un cono de revolución de altura H y radio de la base R.