Índice: Representación gráfica de funciones. Problemas.

1.- Representación gráfica de funciones

Antes de la representación de la gráfica de una función se realiza el siguiente estudio:

1º) Dominio.

Para calcularlo se puede seguir el procedimiento explicado en *Pautas para el cálculo de dominios*.[1] Sin embargo, como nos vamos a reducir al estudio de funciones polinómicas y racionales, el cálculo del dominio es trivial.

2º) Paridad.

Si el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar. En caso contrario:

a) Si f(-x)=f(x), f es par (simétrica respecto de OY).

b) Si f(-x)=-f(x), f es impar (simétrica respecto de O).

c) En los demás casos no es ni par ni impar.

3º) Periodicidad.[2]

Si la función es periódica de periodo T, se reduce el estudio al intervalo [0,T).

4º) Cortes con los ejes.

a) Corte con OX: se resuelve el sistema y=0, y=f(x).

b) Corte con OY: se resuelve el sistema x=0, y=f(x).

5º) Signo de la función.

Su estudio nos permite hallar las regiones de existencia de la función.

6º) Asíntotas y ramas parabólicas.

Se sigue el procedimiento explicado en *Pautas para el cálculo de asíntotas y ramas*.[1]

7º) Continuidad. Discontinuidades.

a) Se calcula f'. En los puntos donde f es derivable, la función es continua.

b) En los puntos en los que la función no es derivable se estudia la continuidad y las discontinuidades siguiendo el procedimiento explicado en *Pautas para el estudio de la continuidad*.[1]

---

[1] Ver *Resúmenes*, en este mismo *blog*.

[2] Aunque las funciones polinómicas y racionales no son periódicas, no dejaremos por eso de mencionar este apartado, indicando que la función no es periódica.

8º) Signo de la derivada primera.

Nos permite estudiar la monotonía y los extremos de la función mediante el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

9º) Signo de la derivada segunda.

Nos permite estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función mediante el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.

10º) Tabla de valores.

Se recogen en una tabla los puntos que nos han ido apareciendo a lo largo del estudio: cortes con los ejes, extremos y puntos de inflexión.

* * *

Por ejemplo, estudiemos y representemos la gráfica de la función:

$$y=f(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$$

1º) Dominio: R.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos f(-x):

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2=-x^3-3x^2$$

La función no es ni par ni impar.

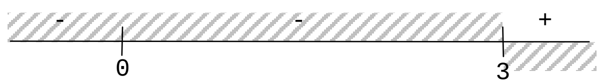
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ doble} \\ x=3 \end{cases}$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) No tiene asíntotas verticales.

b) Rama parabólica en la dirección del eje OY en $+\infty$ y en $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-3x^2)=\lim_{x\to\pm\infty}[x^3(1-3/x)]=\pm\infty$$

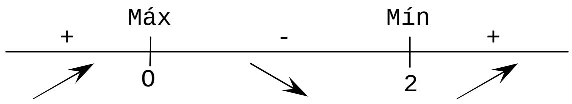
7º) Continuidad. Discontinuidades:

[1] Tachamos las regiones en las que no está la gráfica de la función.

La función f es continua en su dominio por ser derivable en él:

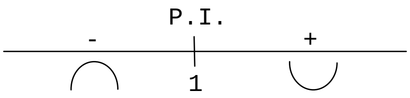
$$f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

8º) Signo de la derivada primera:



9º) Signo de la derivada segunda:

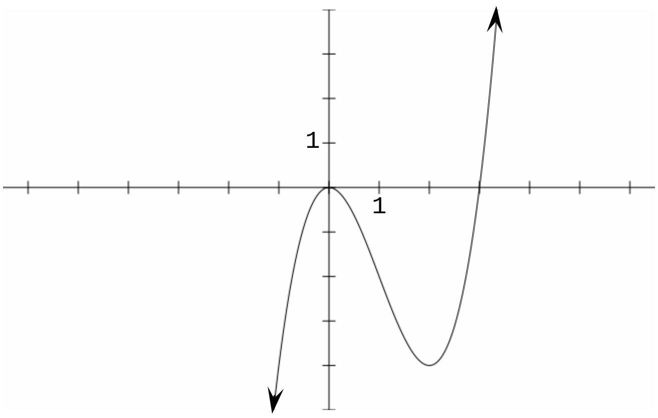
$$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6=6(x-1)$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con OX y OY (máximo)
3	0	Corte con OX
2	-4	Mínimo
1	-2	Punto de inflexión

GRÁFICA:



* * *

Por ejemplo, estudiemos y representemos la gráfica de la función:

$$y=f(x)=\frac{20x-20}{(x-2)^2}=\frac{20(x-1)}{(x-2)^2}$$

1º) Dominio: $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

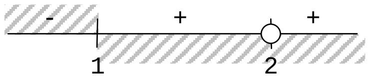
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow 20(x-1)=0 \Rightarrow x=1$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=-20/4=-5$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta $x=2$ es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{20x-20}{(x-2)^2}=\frac{20}{0^+}=+\infty$$

b) La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{20x-20}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{20}{2(x-2)}=\frac{20}{\pm\infty}=0$$

Como la asíntota horizontal coincide con el eje de abscisas, la posición relativa con respecto a la gráfica de la función ya se conoce por el estudio del signo de la función.

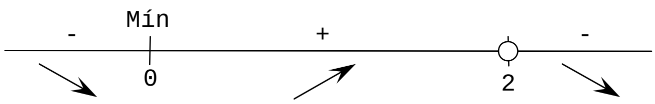
7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{20x-20}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{20(x-2)^2-(20x-20)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{20x-40-40x+40}{(x-2)^3}=\frac{-20x}{(x-2)^3}$$

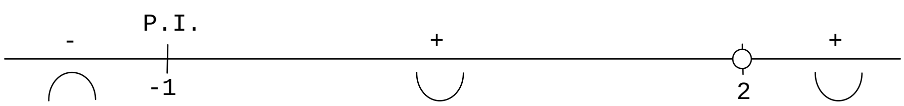
b) La función presenta en $x=2$ una discontinuidad con salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:



9º) Signo de la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{-20x}{(x-2)^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-20(x-2)^3+20x\cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{-20x+40+60x}{(x-2)^4}=\frac{40(x+1)}{(x-2)^4}$$

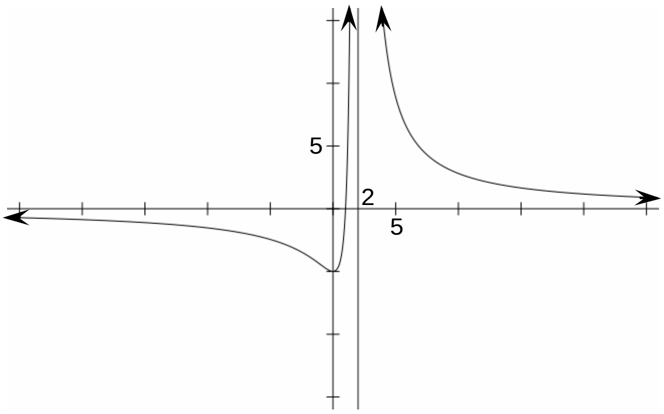


[1] Hemos señalado el punto de abscisa 2 para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

10º) Tabla de valores:

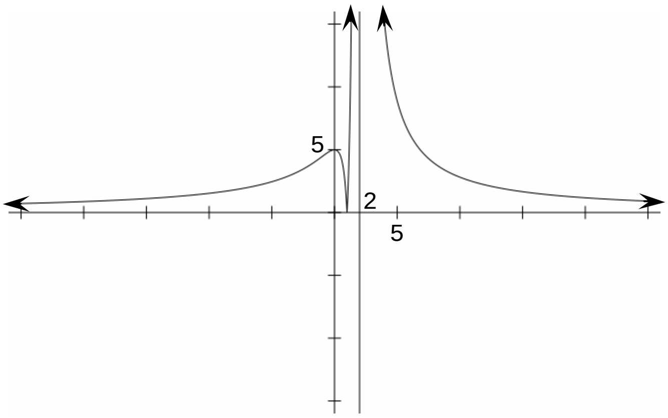
x	y	Clasificación
1	0	Corte con OX
0	-5	Corte con OY (mínimo)
-1	-40/9	P. de inflexión

GRÁFICA:



* * *

Si piden la gráfica de |f|, es fácil obtenerla a partir de la de f. Por ejemplo, la gráfica del valor absoluto de la función anterior es la siguiente:



Si pidieran el estudio de |f|, podríamos obtenerlo fácilmente de su gráfica y del estudio hecho de la función f.

2.- Problemas

1) Estudia y representa:

a) $y=\frac{1}{x^2+3}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2-x-2}$ **c)** $y=x^3-3x^2$ **d)** $y=\frac{x}{x^2-9}$

e) $y=\frac{6x}{x^2+1}$ **f)** $y=x^4-4x^2$ **g)** $y=\frac{x^2-4}{x-1}$ **h)** $y=\frac{(x-1)^2}{x-2}$

i) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ **j)** $y=\frac{x^2-4}{x^2-9}$ **k)** $y=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ **l)** $y=\frac{x^3}{1-x^2}$