8 de marzo de 2001.

1) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

2) (1p) Define rango de una matriz.

3) (2p) Demuestra las siguientes propiedades:

a) La inversa de la matriz A, si existe, es única.

b) Si la matriz A es inversible, entonces la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.

4) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+z=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ x-2y+az=1 \end{array}\right\}$$

5) (2p) Elimina los parámetros y resuelve el sistema a que da lugar dicha eliminación, expresando su solución en forma paramétrica:

$$\left\{\begin{array}{l} x=a-b+c \\ y=2a-c \\ z=a+b-2c \end{array}\right.$$

6) (2p) Halla la inversa, si existe, de la matriz A y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: *Discute y resuelve el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+z=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ x-2y+az=1 \end{array}\right\}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ 1 & -2 & a & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a & -3 \\ 0 & 2a-2 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & a & 1 \\ 0 & \mathbf{2-2a} & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2-a-a^2} & -2-a \end{array}\right) \overset{4}{\to} \left\{\begin{array}{l} 2-2a=0 \\ -a^2-a+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\dfrac{1\pm3}{-2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ a=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x-2y-2z=1 \\ 6y+3z=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+2y-2-4y \\ z=-1-2y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{array}\right.$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+az=1 \\ 2(1-a)y+(1-a)z=-3 \\ (-a^2-a+2)z=-a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-a-2}{-a^2-a+2} \overset{6}{=} \frac{-(a+2)}{-(a+2)(a-1)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1-a)y=-3-(1-a)\cdot\frac{1}{a-1}=-3+(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}=-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1+2\cdot\frac{1}{a-1}-a\cdot\frac{1}{a-1}=\frac{a-1+2-a}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a-1}}$$

---

1 $1^a f \leftrightarrow 3^a f$.
2 $2^a f - 1^a f$; $3^a f - a\cdot 1^a f$.
3 $3^a f + 2^a f$.
4 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
5 Ya que las dos últimas ecuaciones son incompatibles.
6 Factorizamos el denominador.

Ejercicio 5: *Elimina los parámetros y resuelve el sistema a que da lugar dicha eliminación, expresando su solución en forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x=a-b+c \\ y=2a-c \\ z=a+b-2c \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} a-b+c=x \\ 2a-c=y \\ a+b-2c=z \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 2 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & -2 & z \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -3 & -2x+y \\ 0 & 2 & -3 & -x+z \end{array}\right) \overset{2}{\approx}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -3 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & x-y+z \end{array}\right) \rightarrow x-y+z=0$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$x-y+z=0 \Rightarrow x=y-z \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

[1] 2ªf-2·1ªf; 3ªf-1ªf.
[2] 3ªf-2ªf.

Ejercicio 6: *Halla la inversa, si existe, de la matriz A y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ *(2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3}{\approx}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{4}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -1+0+1 \\ 1/2-1/2+0 & 0+1+0 & -1/2-1/2+1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 2ªf·2.
2 2ªf-1ªf.
3 2ªf-3ªf; 1ªf-3ªf.
4 1ªf·1/2; 2ªf·1/4.